DIVIDIERTE POTENZEN, DETERMINANTEN UND DIE ALGEBRA DER VERALLGEMEINERTEN SPURPOLYNOME

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
GERD DIETER ZIPLIES
aus Düsseldorf

1983

UNIV.
LONDON
MED.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543915_0003

Dividierte Potenzen, Determinanten und die Algebra der verallgemeinerten Spurpolynome

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch- Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Gerd Dieter Ziplies

aus Düsseldorf

1983

Dekan: Prof. Dr. R. Meise

1. Berichterstatter: Prof. Dr. A. Bergmann

2. Berichterstatter: Prof. Dr. O. Kerner

Inhaltsverzeichnis

Einleitung iv

Notationen und Konventionen xv

Kapitel 1: Die Algebra $\Gamma(M)$ der "dividierten Potenzen"; Einführung und Zusammenstellung einiger Eigenschaften. 1

Kapitel 2: Die Kanonischen Homomorphismen $\beta_\Gamma : \Gamma(\mathrm{Hom}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma,\Gamma)$ und $\mu_{\Gamma\Gamma}: \Gamma \otimes \Gamma \longrightarrow \Gamma\circ\otimes$; Einführung und Zusammenhänge . 8

Kapitel 3: Die Algebra $(\Gamma_m(A),\tau)$; Einführung und einige Eigenschaften. 20

Kapitel 4: A-Algebra-Moduln unter dem Funktor Γ_k ; Einführung und Anwendung auf β_Γ . 27

Kapitel 5: Die Kombinatorik der freien Algebra $R\{X_k\}_k$ und ihrer verschiedenen Strukturen. 33

Kapitel 6: Γ und der Tensorfunktor; Zusammenhänge. 49

Kapitel 7: Γ und die "Symmetrische Algebra"; Dualität und weitere Zusammenhänge. 56

Kapitel 8: Die Abbildung $\mathrm{Sh}:\Gamma(A) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ und ihr Umfeld. 79

Kapitel 9: Die Algebra $\hat{\Gamma}(A)$; Eigenschaften, multiplikative Struktur und spezielle Basen. 92

Kapitel 10: Eine Anwendung von $\hat{\Gamma}(A)$: Polarisationsoperatoren. 106

Kapitel 11: $\hat{\Gamma}(A)$ und die universelle Einhüllende der Lie Algebra A_L . 109

Kapitel 12: Weitere Eigenschaften von $\hat{\Gamma}(A)$: Grundringerweiterung und Zentrum. 115

Kapitel 13: Der Funktor $\hat{\Gamma}$ für Algebren ohne Eins. 120

Kapitel 14: Die Cogebra-Struktur von $\Gamma(M)$ als Algebra-Hom. $\Gamma(M) \longrightarrow \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M))$ und ihre Übertragung auf $\hat{\Gamma}(A)$. 132

Kapitel 15: Die Erweiterung von $\psi:\Gamma^{+}(M) \longrightarrow N$ zu $\overline{\psi}:\Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(N)$, Anwendung auf die Komposition von Polynomgesetzen und Übertragung auf Algebra-Hom. $\psi:\hat{\Gamma}(A) \longrightarrow B$. 149

Kapitel 16: Die Algebra $\hat{\Gamma}(R[X]^{+})$ der symmetrischen Funktionen. 166

16.1 : Struktur 166

16.2 : Newtonsche Formeln und Cayley-Hamilton-Theorem 172

16.3 : $A \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ als Lie-p-Homomorphismus und Frobeniusendomorphismus in Char. p 174

Kapitel 17: Γ und die "Äußere Algebra"; die kan. Hom. $\beta_{\Lambda}:\Gamma(\mathrm{Hom}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda,\Lambda)$ und $\tilde{B}_{\Lambda}:\Gamma(\mathrm{End}(R^{n})) \longrightarrow \Lambda_{n}(R^{n}\oplus R^{n})$. 178

Kapitel 18: Die Determinante für freie Moduln als Algebra-Hom. $\phi_{D}:\hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^{n})) \longrightarrow R$. 190

Kapitel 19: Spezielle Zusammenhänge zwischen T_{k} u. Λ_{k}. 199

Kapitel 20: Die Determinante ϕ_{D} und der Zusammenhang zwischen symmetrischen $(\Gamma_{n}(R[X]))$ und schiefsymmetrischen $(\Lambda_{n}(R[X]))$ Polynomen. 204

Kapitel 21: Die Algebra $\hat{\Gamma}(R\{X_{k}\}_{k}^{+})$ und das Ideal $\mathfrak{T}_{n+1}^{+}$. 218

Kapitel 22: Die Faktorkommutatoralgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_{k}\}_{k}^{+})$ ("Algebra der verallgemeinerten Spurpolynome") und ihre Struktur. 231

Kapitel 23: Kommutative polynomiale Identitäten für $M_{n}(R)$. I. Einführung 257

Kapitel 24: Die Faktorkommutatoralgebren von $\Gamma_{n}(A)$ und $\bigoplus_{j} \mathrm{Hom}(\Gamma_{j}(A^{(K)}),\Gamma_{n}(A))$ für zentral separable Algebren A vom Rang n^{2}. 265

Kapitel 25: Kommutative polynomiale Identitäten für $M_{n}(R)$. II. Ergebnisse und neue Fragestellungen. 279

Kapitel 26: Die Faktoralgebra $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_{C+\mathfrak{T}_{n+1}^+}$. 287

26.1 : Einfache Spezialfälle 287

26.2 : Endliche Erzeugtheit 299

Anhang A.I. : Ein Hilfssatz zu Isomorphismen freier Moduln 306

Anhang A.II.: Die Determinante für endlich-erzeugt projektive Moduln M als Algebra-Hom. $\phi_D^M: \hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$. 307

Anhang A.III:: $\Gamma(M)$ für graduierte Moduln. 317

Zusammenfassung 322

Literaturverzeichnis 324

Einleitung

Vorgehen und zentrale Ergebnisse: Ausgangspunkt für diese Arbeit waren die Ergebnisse von Ju. P. Razmyslov und C. Procesi, die unabhängig voneinander und mit verschiedenen Methoden nahezu gleichzeitig feststellten, daß die "Spuridentitäten" des Matrizenrings $M_n(R)$ über einem Körper der Charakteristik 0 sämtliche aus der Cayley-Hamilton-Gleichung resultieren.

Ein charakteristik-freier Zugang zu den Spuridentitäten muß, will er ähnliche Ergebnisse anvisieren, zwangsläufig alle Koeffizienten der Cayley-Hamilton-Gleichung explizit zu den "Spuren" hinzunehmen, da jene sich nicht länger durch Spuren von Matrizen aus $M_n(R)$ ausdrücken lassen.

Procesi setzt in einem ersten Schritt die Algebra T der "kommutativen Spurpolynome" an als Polynomring in "Ausdrücken" $Tr(X_{i_1} \ldots X_{i_k})$ faktorisiert nach den Relationen $Tr(X_{i_1} \ldots X_{i_k}) = Tr(X_{j_1} \ldots X_{j_k})$ für zyklische Permutationen $X_{j_1} \ldots X_{j_k}$ von $X_{i_1} \ldots X_{i_k}$. Der naheliegende analoge Ansatz eines Polynomrings in allen (Cayley-Hamilton-) Koeffizienten (nicht nur "Tr") führt sofort auf daß Problem, welche Relationen man von vorn herein wegfaktorisieren will, und erscheint daher für einen charakteristik-freien Zugang wenig geeignet.

Auf einen anderen Ansatz führen die Arbeiten von A. Bergmann und R. Schmähling. Danach läßt sich bei beliebigem kommutativem Grundring R die Hauptnorm einer zentral separablen R-Algebra A vom festen Rang n^2 repräsentieren durch einen

R-Algebra-Homomorphismus $\phi_n : \Gamma_n(A) \longrightarrow R$. Dies gilt insbesondere für $A := End(R^n) \cong M_n(R)$ und die Determinante. Die Koeffizienten der Cayley-Hamilton-Gleichung für $f \in A$ haben dann die Form:

(*) $\phi_n(f^{[i]} 1_A^{[n-i]})$ mit $i \in \underline{n}$.

Sie legen nur in ihrer Gesamtheit die "Determinantenform" ϕ_n eindeutig fest. (Γ ist dabei der Funktor "Algebra der dividierten Potenzen", und $\Gamma_n(A)$ ist die n-te homogene Komponente des graduierten R-Moduls $\Gamma(A)$, mit einer von A und speziellen Eigenschaften des Funktors Γ (s.u.) herrührenden Multiplikation. $\Gamma_n(A)$ wird als Algebra erzeugt von

(**) $\{ f^{[i]} 1_A^{[n-i]} \mid i \in \underline{n},\ f \in A \}$.

Diese Ergebnisse von A. Bergmann sind hier schon in die Sprache von N. Roby übersetzt, der unabhängig von A. Bergmann ebenfalls eine Theorie von "Polynomabbildungen" für Moduln über kommutativen Ringen entwickelt hat.) Da ϕ_n ein R-Algebra-Homomorphismus ist, haben die $f^{[i]} 1_A^{[n-i]} \in \Gamma_n(A)$ dasselbe multiplikative Verhalten wie die $\phi_n(f^{[i]} 1_A^{[n-i]}) \in R$. Behält man im Hinterkopf, daß eigentlich noch ϕ_n angewendet werden muß, kann man sich daher die Koeffizienten der Cayley-Hamilton-Gleichung für $f \in A$ durch die Elemente $f^{[i]} 1_A^{[n-i]}$ aus $\Gamma_n(A)$ repräsentiert denken. Bei diesem Vorgehen tritt das Problem der wegzufaktorisierenden Relationen gar nicht auf, da $\Gamma_n(A)$ schon "fertig" gegeben ist. (Beachte (**)!)

Außer jenen "trivialen" Relationen des Procesi Ansatzes gibt es aber zwischen den "Spuren" in T weitere Relationen, die als "kommutative Spuridentitäten für $M_n(R)$" bezeichnet werden. Genauer versteht man darunter diejenigen Elemente aus

T, die bei allen Spezialisierungen $X_i \longmapsto f_i \in A$ Null ergeben. Neben Razmyslov und Procesi hat unabhängig auch H. Helling diese Identitäten untersucht, und das Razmyslov - Procesi- Helling Theorem besagt, daß über einem Körper der Charakteristik 0 die kommutativen Spuridentitäten für $M_n(R)$ von einem Element ω_{n+1} aus T herrühren. Zu jedem $k\in\mathbb{N}$ gibt es ein ausgezeichnetes Element

$$\omega_k := \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i_\sigma} \operatorname{Tr}(M_{i_\sigma}) \in T ,$$

wobei die M_i Monome in den (nicht kommutierenden) Unbestimmten X_j ($j\in\mathbb{N}$) sind. Spezialisiert man $X_j \longmapsto f_j\in A$ ($j\in\mathbb{N}$), so kann man mit den Elementen $(M_{i_\sigma}|_{X_j=f_j})^{[1]}1_A^{[n-1]}$ die resultierenden ω'_k ausrechnen und erhält dann $f_1^{[1]}\ldots f_k^{[1]}1_A^{[n-k]}$. Da negative Exponenten in eckigen Klammern Null ergeben, ist $\omega'_k=0$ für alle $k>n$. Insbesondere ist $\omega'_{n+1}=0$, schon bevor man ϕ_n (Hinterkopf! s.o.) darauf angewendet hat. In einem allgemeinen Ansatz gilt es daher als erstes den Einschnitt bei $k=n+1$ zu beseitigen. Die explizite Ausrechnung der ω'_k legt die Vermutung nahe, daß ω'_{n+1} eigentlich von der Gestalt $f_1^{[1]}\ldots f_{n+1}^{[1]}\in\Gamma_{n+1}(A)$ sein sollte, und daß die "Spuren" $(M_{i_\sigma}|_{X_j=f_j})^{[1]}1_A^{[n-1]}$ durch $(M_{i_\sigma}|_{X_j=f_j})^{[1]}\in\Gamma_1(A)$ ersetzt werden müßten; daher müßte man wohl alle $\Gamma_m(A)$ betrachten, und es sollte möglich sein, $\Gamma_r(A)$ mit $\Gamma_s(A)$ zu multiplizieren. Eine Limesbildung liegt nahe, scheitert aber daran, daß sich bei den Probeobjekten $\Gamma_m(A)$ keine geeigneten Homomorphismen finden lassen. Hier liefern die gleichen Rechnungen die Vermutung, daß $f^{[i]}$ jeweils in die Folge $(f^{[i]}1_A^{[m]})_{m\geq 0}$ übergehen muß. Man bekommt so einen R-Modul-Homomorphismus "Sh"

von $\Gamma(A)$ in das Produkt $\prod_i \Gamma_i(A)$. Letzteres ist mit komponentenweiser Multiplikation eine R-Algebra. $\hat{\Gamma}(A) := Sh(\Gamma(A))$ ist Subalgebra dieser Struktur und als R-Modul via Sh zu $\Gamma(A)$ isomorph.

$\hat{\Gamma}(A)$ hat funktoriellen Charakter, was den Ansatz $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k)$ für die gesuchte "Algebra der verallgemeinerten Spurpolynome" nahe legt. Diese Algebra hat jedoch den Schönheitsfehler, daß neben den $X^{<i>}$, die die $X^{[i]}1_A^{[n-i]}$ ersetzen (vgl. (*), (**)), auch Konstanten $1^{<j>}$ als Erzeugende auftreten, in denen die X_i nicht vorkommen. Abhilfe schafft die Modifikation $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, wobei $R\{X_k\}_k^+$ die Algebra ohne Eins der Polynome mit konstantem Glied 0 bezeichnet. Auch diese Konstruktion ist funktoriell, und hier endlich gilt sogar $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) = \varprojlim_i \Gamma_i(R\{X_k\})$ in der Kategorie der graduierten R-Algebren. $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ ist Faktoralgebra, und der Kern des kan. Epimorphismus $p_n: \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ wird über einem Körper der Charakteristik 0 gerade von ω_{n+1} (Analogon!) erzeugt. $Kern(p_n) =: \mathfrak{T}_{n+1}^+ = \bigoplus_{i>n} Sh(\Gamma_i(R\{X_k\}_k^+))$. Die $\mathfrak{T}_m^+$ ($m \in \mathbb{N}$) bilden eine absteigende Filtrierung durch Ideale. Ist $\pi_n: \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \Gamma_n(A)$ der kan. R-Algebra-Epi., dann definiert man die Verallgemeinerung der kommutativen Spuridentitäten so, daß gerade diejenigen Elemente z von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ erfaßt werden, für die $\phi_n \circ \pi_n(z|_{X_i = f_i})$ bei allen Spezialisierungen $X_i \longmapsto f_i \in A$ Null ist. Es ist klar, daß die Elemente von $\mathfrak{T}_{n+1}^+$ dazu gehören. Somit liefert die Homogenität von ϕ_n die erste Quelle für die "verallgemeinerten kommutativen Spuridentitäten" .

Aber $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist nicht kommutativ und daher immer noch

nicht die richtige Algebra. Denn, da ϕ_n in einen kommutativen Ring R abbildet, ist klar, daß hier Identitäten dazu kommen (nämlich Kommutatoren), die bei Procesi schon eliminiert sind, indem er seine Algebra kommutativ ansetzt. Die zweite Quelle für die Identitäten ist demnach die Kommutativität von Bild(ϕ_n)=R. Ordnet man jedem $z \in \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ die Abbildung $(f_j)_{j\in J} \longmapsto \phi_n \circ \pi_n(z\big|_{X_j=f_j})$ von $A^{(J)}$ nach R zu, so faktorisiert diese Zuordnung über die Faktorkommutatoralgebra $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$. Wie sieht diese kommutativ gemachte Algebra aus? Zunächst einmal ist sie (alle Konstruktionen können über einem kommutativen Ring R gemacht werden!) über einem Körper der Charakteristik 0 isomorph zur Algebra Procesis. Der Ansatz ist also vernünftig. Es zeigt sich (Kap. 22), daß man für den Übergang zu $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ die Algebra $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ nur nach den Relationen $X_{i_1}\ldots X_{i_k}^{<m>} = X_{j_1}\ldots X_{j_k}^{<m>}$ für zyklische Permutationen $X_{i_1}\ldots X_{i_k}$ von $X_{j_1}\ldots X_{j_k}$ und für $m\in\mathbb{N}$ faktorisieren muß, was auch den Ansatz Procesis, der nur m=1 betrachtet, direkt fortführt.

Nachdem man wie oben beschrieben eine Reihe verschiedener Konstruktionen durchlaufen, sie untersucht und auf die benötigten Eigenschaften überprüft hat, findet man also die gesuchte Algebra der verallgemeinerten Spurpolynome als die Faktorkommutatoralgebra $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$. Die Struktur dieser Algebra kann vollständig geklärt werden. Bei nur einer Unbestimmten findet man: $\overline{\Gamma}(R\{X\}^+) = \hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ist die "Algebra der symmetrischen Funktionen", $\Gamma_n(R[X])$ die Algebra der symmetrischen Polynome in n Variablen. Bei einer endlichen oder abzählbaren Menge J von Unbestimmten läßt sich $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in J}^+)$

zerlegen als Tensorprodukt von Algebren, die sämtliche zu $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ isomorph sind. $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist also eine Polynomalgebra.

Mit dem kan. Epimorphismus $\kappa:\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ definiert man durch

$$\kappa(z) \longmapsto ((f_j)_{j\in J} \longmapsto \phi_n \circ \pi_n(z|_{X_j=f_j}))$$

eine Zuordnung von $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ in die Abbildungen von $A^{(J)}$ nach R. Nennt man die Elemente aus $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, die im Kern dieser Zuordnung liegen, "verallgemeinerte kommutative Spuridentitäten", so stimmen im Fall der Charakteristik 0 diese Identitäten mit den "kommutativen Spuridentitäten" überein. Das Razmyslov-Procesi-Helling Theorem läßt sich aus dieser Sicht jetzt auch anders deuten: Ist C das Kommutatorideal von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ (also $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \cong \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_C$), so kann man über einem Körper der Charakteristik 0 die verallgemeinerten kommutativen Spuridentitäten als das Bild $\kappa(\mathfrak{F}_{n+1}^+)$ der Filterkomponente $\mathfrak{F}_{n+1}^+$ identifizieren. Faktorisiert man demnach die Summe $\mathfrak{F}_{n+1}^+ + C$ aus $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ heraus, so hat man damit alle Relationen zwischen den Koeffizienten der Cayley-Hamilton-Gleichungen für Produkte von Matrizen erfaßt. Die beiden gefundenen Quellen Homogenität von ϕ_n und Kommutativität des Bildes liefern also bereits alle Relationen.

Bei einem beliebigen kommutativen Grundring reicht ω_{n+1} oder allgemeiner ein einziges Element nicht mehr aus, um ganz $\kappa(\mathfrak{F}_{n+1}^+)$ zu erzeugen. Vielmehr läßt sich als chrakteristik-freie Version des Razmyslov-Procesi-Helling Ergebnisses die Aussage vermuten:

$\kappa(\mathfrak{F}_{n+1}^+)$ ist die Menge der verallgemeinerten kommutativen Spuridentitäten in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$.

Dies kann man auch so formulieren: Es gibt nur die "trivialen" Relationen $C + \mathfrak{T}^+_{n+1}$ in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$. Diese Vermutung konnte zunächst noch nicht allgemein bewiesen werden, aber neben dem Char.-0-Fall wird sie durch zwei weitere Spezialfälle gestützt. Da es reicht, die Injektivität eines explizit gegebenen Homomorphismus der Algebra $B(J,n) := \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in J})/_{C+\mathfrak{T}^+_{n+1}}$ in den freien R-Modul $\mathrm{Hom}(\Gamma(A^{(J)}),R)$ nachzuweisen (vgl. Kap.25), erscheint ein allgemeiner Beweis (oder Gegenbeweis) der Vermutung nicht aussichtlos, hätte man etwa, daß B(J,n) als R-Modul frei ist, mit einer explizit gegebenen,geeigneten Basis. Einstweilen ist es nur gelungen zu zeigen, daß B(J,n) bei endlichem J und beliebigem Grundring als Algebra endlich erzeugt ist. Man kann B(J,n) auch so betrachten, daß man erst $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ nach $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ faktorisiert, wobei sich $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ ergibt, und dann kommutativ macht. In dieser Sichtweise kann man über einem Körper der Charakteristik 0 die üblichen Polynomidentitäten für $M_n(R)$ als das Radikal (vgl. Bew. von 25.1.8.) der Faktorkommutator Bildung

$$\Gamma_n(R\{X_k\}_k) \xrightarrow[\text{kan. Epi.}]{} \Gamma_n(R\{X_k\}_k)/_{\text{Kommutatorideal}}$$

charakterisieren. Dies führt beinahe von selbst zur Untersuchung der Faktorkommutatoralgebra von $\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n))$, die über einem beliebigen kommutativen Grundring R gerade isomorph zum Grundring ist. Es zeigt sich, daß die Determinante ϕ_n dabei gerade der Faktorkommutatorhomomorphismus ist. Das Gleiche gilt auch für beliebige zentral separable Algebren vom Rang n^2, die als A_n-Ringe nach dem Satz von Artin-Procesi auch durch die von ihnen erfüllten Polynomidentitäten charakterisiert werden können. Mit anderen Worten gilt

also für jede zentral separable R-Algebra A vom Rang n^2 über einem kommutativen Ring R:

$\mathrm{Kern}(\phi_n)$ = Kommutatorideal von $\Gamma_n(A)$.

Im Gegensatz dazu findet man beim sogenannten Tannaka-Artin-Problem - bei dem es um die Frage geht, wann für die reduzierte Norm $RN_{A/K}$ einer zentral einfachen Algebra A über einem Körper K (betrachtet als Gruppenhom. $RN_{A/K}: A^* \longrightarrow K^*$ der Einheitengruppen) gilt:

$\mathrm{Kern}(RN_{A/K})$ = Kommutatorgruppe von A^* $(=: [A^*, A^*])$ -

- Beispielen, wo die Gleichheit nicht gilt (vgl. [Dra/Kne 80]).

Die "Whitehead-Gruppe" $\mathrm{Kern}(RN_{A/K}) / [A^*, A^*] =: SK_1(A)$ ist nicht immer trivial.

Schon oben wurde mit $\phi_n \circ \pi_n$ die Determinante zu einem R-Algebra-Hom. $\hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^n)) \longrightarrow R$ fortgesetzt. In einem Anhang zur Arbeit wird noch gezeigt, daß diese Sichtweise die Verallgemeinerung von R^n auf beliebige endlich-erzeugt projektive R-Moduln M erlaubt, indem die Goldman-Determinante als R-Algebra-Hom. $\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$ dargestellt wird.

Einen genaueren Überblick über die Systematik der Arbeit gibt das Inhaltsverzeichnis. Separate Einleitungen zu verschiedenen Kapiteln ergänzen diese Übersicht.

Zur Darstellung: Dem Inhaltverzeichnis entnimmt man zum Teil schon, daß bei der Präsentation des behandelten Stoffes noch ein weiterer Gesichtpunkt betont wurde, der mit dem Stichwort "Polynomfunktoren" zu kennzeichnen wäre und der in die Darstellungstheorie der Gl(n) hineinreicht. Der darstellungstheoretische Aspekt ist ansonsten hier, mit den angesprochenen Arbeiten von Green, Carter/Lusztig und Clausen

sowie mit der Anwendung am Schluß von Anhang II, nur angedeutet und bedarf sicher noch genauerer Untersuchung.
Nach I.G. MacDonald ist ein Polynomfunktor F ein Funktor, für den die Abbildungen $\mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M),F(N))$ mit $g \longmapsto F(g)$ Polynomabbildungen sind. Nach Roby bedeutet dies die Existenz eines R-Modul-Hom. von $\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N))$ nach $\mathrm{Hom}(F(M),F(N))$. Über einem Körper der Charakteristik 0 sind die Polynomfunktoren Γ("Algebra der dividierten Potenzen"), S ("Symmetrische Algebra") und Λ("Äußere Algebra") sämtliche Bausteine, die man für die Polynomdarstellungen der Gl(n) benötigt, wie etwa von J. Towber gezeigt wurde. Die Bedeutung dieser drei wichtigen Polynomfunktoren zu unterstreichen war mit ein Anliegen dieser Darstellung. Daß es sich in allen drei Fällen um Polynomfunktoren handelt, wird durch die Existenz natürlicher Transformationen

β_F: $\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M),F(N))$ $\quad (F = \Gamma, \Lambda, S)$

gesichert, die nicht nur R-Modul-Homomorphismen sind, sondern sogar R-Algebra-Hom. von der Algebra $\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N))$ der dividierten Potenzen in die Convolutionsalgebra $(\mathrm{Hom}(F(M),F(N)),*)$. Tatsächlich liegt bereits in diesen β_F die besondere Bedeutung jedes Einzelnen dieser drei Funktoren verborgen: So folgt aus β_Γ die Existenz eines Homomorphismus $\Gamma(M)\otimes\Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(M\otimes N)$ der für M=N=A (A R-Algebra) die oben angesprochene Multiplikation auf den Komponenten $\Gamma_i(A)$ möglich macht. Für den Spezialfall N=R wird $\Gamma(M^*)$ durch β_S gerade zum graduierten Dual von S(M). Schließlich liefert β_Λ für $M=N=R^n$ genau die Determinante ϕ_n von $\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n))$ nach $\mathrm{End}(\Lambda_n(R^n)) \cong R$. Außerdem liefert β_Λ noch

die Isomorphie $\Gamma_n(R[X]) \cong \Lambda_n(R[X])$ von symmetrischen und schiefsymmetrischen Polynomen in n Variablen.
Die bis zu einem gewissen Grad einheitliche Präsentation der drei Funktoren und ihrer Beziehungen zu Γ soll über ihre unmittelbare Bedeutung für die Anwendungen in dieser Arbeit hinaus ein Gefühl für die Zusammenhänge wecken, welche in der Zukunft in Richtung auf die Darstellungstheorie noch weiter zu verdeutlichen sein werden.

Methoden: Bei den verwendeten Methoden steht ein kombinatorischer Aspekt mit im Vordergrund. Dies drückt sich zum einen in dem Kapitel "Die Kombinatorik der freien Algebra" aus, wo Bijektionen zwischen verschiedenen Mengen (darunter Permutationen und Partitionen) betrachtet werden, die alle die Basis von $R\{X_k\}_k$ parametrisieren. Zum anderen setzt es sich fort in der Untersuchung von $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$, welches gerade die Algebra der symmetrischen Funktionen ist, und in der Zerlegung von $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ in ebensolche Algebren. Auch die kombinatorisch interessanten "Standard-Doppel-Tableaus" sind hier später noch einzubeziehen,zum einen wegen ihrer von M. Clausen verdeutlichten darstellungstheoretischen Relevanz, zum anderen schon deswegen, weil sie die Algebra $S(End(R^n))$ erzeugen, die "dual" zu $\Gamma(End(R^n))$ ist. In gewisser Weise bildet $S(End(R^n))$ nur den "multilinearen" Anteil von $\Gamma(End(R^n))$,und in einem ähnlichen Verhältnis steht bei beliebigem Grundring die Algebra der kommutativen Spurpolynome Procesis zur Algebra $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$. Die höhere Komplexität des Funktors Γ und seiner Varianten erfordert daher eine Fortentwicklung der Methoden, die mit der weiteren

Untersuchung der Algebren B(J,n) aus Teil 1 der Einleitung hoffentlich bald fortgesetzt werden kann.

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. A. Bergmann, der mir nicht nur die Möglichkeit zur Anfertigung dieser Arbeit gab, sondern mir auch stets die Zeit dazu ließ, für seine Unterstützung herzlich danken.

1. Liste der in fester Bedeutung verwendeten Bezeichnungen

(Vgl. aber auch Abschnitt 2.)

Die Seitenzahlen hinter den Bezeichnungen geben jeweils die Stelle des ersten Auftretens an und evtl. solche Stellen, wo die Bezeichnung in erweiterter Bedeutung erstmals auftritt:

α_L^M	13	$\hat{\Gamma}(\psi)$	95,96,122	$\varepsilon(A)$	1
β_N^M	10	$\hat{\Gamma}(A)_m$	96	$\varepsilon_{\Gamma(M)}$	6
β_Γ	20	$gr\hat{\Gamma}(A)$	96	$\varepsilon_{\hat{\Gamma}(A)}$	147
$\beta_{\Gamma i}$	20	$\hat{\Gamma}(A^+)$	121	ζ_{MR}	159
β'_{Tk}	52	$\hat{\Gamma}_k(A^+)$	121	ζ_{AB}	159
β'_T	52	$\hat{\Gamma}^+(A)$	142	ζ_A	159
β_T	53	$\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$	232	η_{Ak}	21
β_{Tk}	53	$\Gamma(C,m,n)$	287	$\eta_{T_k(A)}$	52
β_S	58	$\Gamma\{E\}$	292	η_{TS}	49
β_{Si}	58	Δ_C	xix	θ_S	63
β_Λ	180	Δ_{k-1}	xix	θ_Γ	63
$\tilde{\beta}_{Tk}$	203	$\Delta_{\Gamma(M)}$	6	θ_Λ	184
$\Gamma(M)$	2	Δ_{MN}	76	ι_Γ	49
$\Gamma^R(M)$	2	$\tilde{\Delta}$	136	ι_Λ	199
$\Gamma_k(M)$	3	$\tilde{\Delta}_{i-1}$	136	$\iota_{\Lambda k}$	199
$\Gamma(f)$	4	Δ^+	140	$\kappa(A)$	231
$\Gamma_k(f)$	4	$\hat{\Delta}$	142	κ_A	232
$(\Gamma_k(A),\tau)$	22	$\hat{\Delta}_{i-1}$	143	κ	232
$(\prod_k \Gamma_k(A),\tau)$	25	$\Delta_{\hat{\Gamma}(A)}$	147	μ_A	xviii
$\hat{\Gamma}(A)$	91,95	$\Delta_{\hat{\Gamma}(A^+)}$	148	$\overline{\mu}_A$	4
$\hat{\Gamma}_i(A)$	92	ε_C	xix	μ_{LM}	15

μ_{Ak}	21	ϕ_D	197,279	$\mathfrak{F}_n^+$	121
μ_{Ts}	49	ϕ_{Dn}	197	$\mathfrak{F}(I)$	317
$\mu_{T_k(A)}$	52	ϕ_{An}	264	$\mathfrak{F}_\alpha(I)$	318
μ	62	ϕ_{An}^R	264	h_λ	171
μ_{*k}	62	ϕ_D^M	308,311	$h_{\Gamma\Lambda}^k$	204
μ_k	62	ϕ_{Dn}^M	308	$\bar{h}_{\Gamma\Lambda}^k$	207
ν^{RS}	4	ϕ_D^{MR}	308	$ht(b_\alpha)$	249
ν_k^{RS}	24	ϕ_{Dn}^{MR}	308	$H_{\Gamma\Lambda}^k$	206
$\hat{\nu}$	118	ψ_L^{MN}	31	$\bar{H}_{\Gamma\Lambda}^k$	209
ν_n	169	$\bar{\psi}(\bar{\chi})$	162	$H_n(m)$	216
ξ	5	$\hat{\psi}$	164	$\hat{\gamma}_{\Gamma\Lambda}^{nm}$	217
$\bar{\xi}$	5	$M^\omega Ak$	27	H_{An}	263
$\hat{\xi}$	98	Ω	228	I_m	239
$\xi_{n,J}$	320	$\mathcal{D}^\Omega$	246	$K(\alpha_1,\alpha_2,..)$	38
ξ_n'	320	Ω_D	246	$K(\alpha_1,...,\alpha_s)$	38
ξ_n	320	$\bar{\Omega}$	249	$K_k(\alpha_1,\alpha_2,..)$	38
π_{ij}	124	$\nabla(I,\alpha)$	137	K_k	38
$\pi(i)$	258	∇^j	225	$K_{k,s}$	38
$\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}$	93	$\bar{\nabla}^j$	225	$L'(\Gamma(M),N)$	70
$\sigma(\bigotimes_{i\in I} f_i^{\otimes\alpha_i})$	54	A_M^L	13	$m(1^{\alpha_1},2^{\alpha_2},...)$	167
σ_U	40	B_Λ	183	$M((\alpha_i)_{i_i};(\beta_i)_{i_i})$	6
Σ_k	xx	$\bar{B}_\Lambda$	187	$\hat{M}((\alpha_i)_{i_i};(\beta_i)_{i_i})$	93
$\Sigma_k(M)$	220	$C(A)$	231	Mo	219
τ	22,46	C_m	237	$Mo((X_k)_k)$	219
υ	82	$e(\lambda_1,...,\lambda_r)$	167	$M\vee N$	249
$\overset{\vee}{\phi}$	191	$f*g$	8	$P((\alpha_i)_{i\in I})$	35
$\overset{\vee}{\phi}_k$	191	f^{*k}	8	$P_m((\alpha_i)_{i\in I})$	35
ϕ	193	$\mathfrak{F}_n$	97	$P_{m,I}((\alpha_i)_i)$	35
ϕ_k	194				

$P_{m,I}$	35	P_n	283	$\tilde{U}(A_{LP})$	114
$P_{m,s}$	35	R_m^n	98	$x^{\tau j}$	22
$P_m(\alpha_1,..,\alpha_s)$	36	s_λ	171	$\bar{x}^\beta$	34
P_m	36	Sh_C	87	$\bar{x}_U$	36
$P_m((\alpha_i)_i)$	36	Sh	88	$\bar{x}_\sigma$	40
$P((\alpha_i)_i)$	36	Sh^+	121	$z_k(M)$	220
$\tilde{P}_{k,\mathbb{N}}$	41	S(1)	223	$z^k(M)$	220
$\tilde{P}_{k,s}$	41	$t((m_i)_i)$	34	z_m	237
$\bar{P}_{k,I}$	41	$\bar{t}((a_i)_i)$	34		
Pol	107	T_L^M	12		
PI	258	Tw	18		
PI'_n	260	$T^+(M)$	34		
PI_n	264	TS(M)	49		
		U^σ	39		

Bezeichnungen, die hier nicht auftreten, werden entweder nur in einem Kapitel in der jeweiligen Bedeutung verwendet, oder sie sind beim erneuten (ersten) Auftreten in anderen Kapiteln mit explizitem Hinweis auf die Stelle der Definition versehen.

2. Konventionen und weitere Bezeichnungen.

In der gesamten Arbeit ist R stets ein kommutativer Ring mit Einselement (der gelegentlich noch weiter spezialisiert wird). Moduln sind, wenn nicht anders gesagt, R-Moduln. Tensorprodukte $M \otimes N$ von R-Moduln sind immer als $M \otimes_R N$ zu lesen. Die Kategorie der R-Moduln wird mit R-MOD abgekürzt. Im Text auftretende Diagramme kommutieren, wenn nicht anders gesagt, in R-MOD. Die Schreibweise "Hom(M,N)" soll impli-

zieren, daß M und N R-Moduln sind und ist dann als $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ zu lesen. Entsprechendes gilt für $\underline{\underline{\mathrm{End}M}} := \mathrm{End}(M) := \mathrm{End}_R(M)$. $\underline{\underline{M^*}} := \mathrm{Hom}(M,R)$. Für $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ ist mit $L \in R\text{-MOD}$ $\underline{\underline{f^*}} := \mathrm{Hom}_R(f,L)$ und $\underline{\underline{f_*}} := \mathrm{Hom}_R(L,f)$ (vgl. [And/Ful 74] §16). (f^* und f_* hängen also eigentlich noch von L ab, das jeweils dem Zusammenhang zu entnehmen ist.)

Ist $\psi: X \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y,Z)$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so wird gelegentlich für $x \in X$ das Element $\psi(x)$ auch als $\underline{\underline{\psi_x}}$ geschrieben. Das Tensorprodukt von Homomorphismen $f \in \mathrm{Hom}(M,M')$ und $g \in \mathrm{Hom}(N,N')$ wird mit $\underline{\underline{f \otimes g}}$ ($\in \mathrm{Hom}(M \otimes N, M' \otimes N')$) bezeichnet. Für die Klammerung soll gelten: $h \circ f \underline{\otimes} g := h \circ (f \underline{\otimes} g)$, d.h. "$\underline{\otimes}$" soll stärker binden als "$\circ$". Sind die R-Moduln M und N graduiert, so soll $\underline{\underline{\mathrm{Hom}_{gr}(M,N)}}$ den Untermodul der graduierten Homomorphismen aus Hom(M,N) bezeichnen.

$\underline{\underline{M_n(R)}}$ sei der zu $\mathrm{End}(R^n)$ isomorphe n-reihige Matrizenring über R. "Standardbasis" von $M_n(R)$ ist immer die Menge $\{\underline{\underline{e_{ij}}} := (\delta_{ir}\delta_{js})_{r,s \in \underline{n}}\}_{i,j \in \underline{n}}$; "Standardbasis" von EndM (mit $M \cong R^n$!) ist $\{e_{ij}\}_{i,j \in \underline{n}}$ mit $\underline{\underline{e_{ij}}}(e_k) := \delta_{jk} e_i$, wenn eine Basis $\{e_i\}_{i \in \underline{n}}$ von M fest gegeben ist, oder es auf deren spezielle Wahl nicht ankommt, und $\{e_i\}_{i \in \underline{n}}$ also beliebig gewählt werden kann.

Eine R-Algebra A ist hier, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, stets assoziativ und besitzt eine Eins, die mit $\underline{\underline{\eta_A}}$ oder $\underline{\underline{\eta}}$ bezeichnet wird ($\eta_A: R \longrightarrow A$). Die Multiplikation wird stets mit $\underline{\underline{\mu_A}}$ bezeichnet. Aus $\mu =: \mu_1$ entsteht durch Iteration in naheliegender Weise $\underline{\underline{\mu_{k-1}}} : A^{\otimes k} \longrightarrow A$. Dabei ist $\underline{\underline{A^{\otimes k}}} := A \otimes \ldots \otimes A$ (k mal).

Eine R-Cogebra C ist hier stets coassoziativ und besitzt

eine Coeins $\underline{\varepsilon_C}$ (oder $\underline{\varepsilon}$). Die Comultiplikation wird stets mit $\underline{\Delta_C}$ oder $\underline{\Delta}$ bezeichnet. Aus $\Delta =: \Delta_1$ entsteht in der üblichen Weise $\underline{\Delta_{k-1}}: C \longrightarrow C^{\otimes k}$.

Eine R-Bigebra ist immer R-Algebra und R-Cogebra im obigen Sinne. Alles Nötige über Cogebren und Bigebren findet man in [Bou 74] III §12 und natürlich auch in [Swe 69].

Es werden einige spezielle R-Bigebren verwendet, ohne daß deren Struktur-Homomorphismen ausdrücklich aufgeführt werden. Dies sind:

- die "Tensor-Algebra" $\underline{T(M)}$ eines R-Moduls M,
- die "Symmetrische Algebra" $\underline{S(M)}$ mit kan. Epimorphismus $\underline{kan_S}: T(M) \longrightarrow S(M)$,
- die "Äußere Algebra" $\underline{\Lambda(M)}$ mit kan. Epi. $\underline{kan_\Lambda}: T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$,

(Diese Strukturen findet man in [Bou 74] III §5-7 und 11.)

- die Polynom-Algebren $\underline{R[X_i]_{i \in I}}$ in kommutierenden und $\underline{R\{X_i\}_{i \in I}}$ in nicht-kommutierenden Variablen X_i $(i \in I)$.
  (Die Indexmenge I wird hier häufig weggelassen, wenn sie aus dem Zusammenhang klar oder unwichtig ist.)

(Zur Bigebra-Struktur von $R[X_i]_i$ vgl. etwa [Gei 77] 2.. Die Cogebra-Struktur von $R\{X_i\}_i$ ist analog definiert, wird aber hier nicht explizit benutzt.)

R-ALG bezeichne die Kategorie der R-Algebren, R-COG die der R-Cogebren und R-BIG die der R-Bigebren. R-BIGGR sei die Kategorie der graduierten Bigebren. Für eine R-Algebra A soll Rechts-A-ALG-MOD die Kategorie der Rechts-A-Algebra-Moduln sein.

Ist A R-Algebra und D eine Teilmenge, so soll "die von D erzeugte Subalgebra von A" immer eine Subalgebra mit Eins

sein! $\langle D \rangle$ bezeichne das von D in A erzeugte Ideal. Die Lineare Hülle einer Teilmenge Y eines R-Moduls M wird mit $[Y]$ oder $[Y]_M$ bezeichnet.

Eckige Klammern treten allerdings auch noch in anderer Bedeutung auf:

- Für Elemente a,b aus einer R-Algebra A ist $[a,b] := ab-ba \in A$.
- Für Elemente $i,j \in \mathbb{N}_o$ ist $[i,j] := \frac{(i+j)!}{i!j!}$.
- Für $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}_o^{(I)}$ ist $[\alpha_i]_i := (\sum_{i \in I} \alpha_i)! (\prod_{i \in I} (\alpha_i!))^{-1}$.

Dabei steht $\mathbb{N}$ für die natürlichen Zahlen, und für eine Menge X sei $X_o := X \dot\cup \{0\}$ (disjunkte Vereinigung).

Neben $\mathbb{N}$ tritt für $n \in \mathbb{N}$ auch die Menge $\underline{n} := \{1,2,\ldots,n\}$ häufig auf. Ist X eine Menge und Y Teilmenge, so sei $X-Y$ die Differenzmenge und $X-0 := X-\{0\}$, falls $0 \in X$.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ seien die ganzen, rationalen bzw. komplexen Zahlen.

Σ_k bezeichne die Symmetrische Gruppe für k Elemente.

Da eine Vielzahl von Indizes benutzt wird, dazu einige Festlegungen:

Indizes, die nicht ausdrücklich als Elemente einer bestimmten Indexmenge definiert sind, was insbesondere bei Summationsbedingungen häufig der Fall ist, sollen stets aus $\mathbb{N}_o$ sein!

Für $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}_o^{(I)}$ ist $|\alpha| := \sum_{i \in I} \alpha_i$. Umgekehrt soll für $\alpha \in \mathbb{N}_o^I$ die Aussage $|\alpha| < \infty$ implizieren, daß $\alpha \in \mathbb{N}_o^{(I)}$ ist. $|\alpha|$ ist dann definiert.

Ist X eine Menge, I eine Indexmenge und $z \in X^{(I)}$ (oder X^I), so soll für $j \in I$ z_j stets die j-te Komponente der Familie z bezeichnen (d.h. $z=(z_i)_{i \in I}$), ohne daß dies jedesmal explizit definiert wird.

Für ein Element $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ und $j \in \mathbb{N}$ wird $\alpha \vdash j$ geschrieben, falls $\sum_{i \in \mathbb{N}} i\alpha_i = j$ ist. $\alpha \vdash 0$ genau dann, wenn $\alpha = (0)_{i \in \mathbb{N}}$ ist.

Schließlich seien noch um gehäuft auftretende Klammern zu vermeiden folgende Konventionen verabredet:

1) $\prod_{i \in I} m_i \prod_{i \in I} n_i$ ist zu lesen als $(\prod_{i \in I} m_i)(\prod_{i \in I} n_i)$.

   Ebenso ist $\prod_{i \in I} m_i \prod_{j \in J} n_j$ als $(\prod_{i \in I} m_i)(\prod_{j \in J} n_j)$ zu lesen;

   andernfalls wird $\prod_{i \in I} (m_i \prod_{j \in J} n_j)$ geschrieben.

2) Analoges gilt beim Auftreten mehrerer Summationssymbole.

3) $ab^{<j>}$ und $ab^{[j]}$ sind stets als $(ab)^{<j>}$ bzw. $(ab)^{[j]}$ zu lesen.

KAPITEL 1 : Die Algebra $\Gamma(M)$ der "dividierten Potenzen"; Einführung und Zusammenstellung einiger Eigenschaften

---

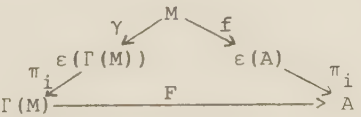
1.1. Definiert man für eine kommutative R-Algebra A $\underline{\underline{\varepsilon(A)}} :=$ $\{ 1+a_1T+a_2T^2+\ldots \in A[[T]] \mid a_i \cdot a_j = [i,j] \cdot a_{i+j} \; \forall i,j \in \mathbb{N}_0 \}$, dann ist $\varepsilon(A)$ ein R-Modul, wenn man als Addition die Multiplikation von Potenzreihen nimmt, und die R-Struktur durch $r \cdot (1+ \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i) :=$ $= 1+ \sum_{i \in \mathbb{N}} r^i a_i T^i$ definiert ([Rob 63]1, Ch.III 7).

Über einem Körper der Charakteristik 0 gilt für ein Element $\sum a_i T^i$ aus $\varepsilon(A)$: $a_i = \frac{1}{i!} a_1^i$. Die Elemente von $\varepsilon(A)$ kann man daher als formale Exponentialreihen deuten.

Anders als in [Rob 63] oder [Berg 65] kann man von dem Problem her, Polynomabbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen auf beliebige R-Moduln zu verallgemeinern, auch direkt auf das folgende universelle Problem stoßen (was aus Platzgründen aber nicht näher ausgeführt werden soll):

Gibt es zu jedem R-Modul M eine kommutative R-Algebra $\Gamma(M)$ und einen R-Modul-Hom. $\gamma: M \longrightarrow \varepsilon(\Gamma(M))$, so daß das Paar $(\Gamma(M), \gamma)$ die universelle Eigenschaft (U) besitzt?

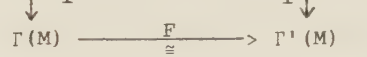
(U) $\forall$ kommutativen R-Algebren A und $\forall$ R-Modul-Hom. $f: M \longrightarrow \varepsilon(A)$ $\exists_1$ R-Algebra-Hom. $F: \Gamma(M) \longrightarrow A$, so daß folgendes Diagramm für alle $i \in \mathbb{N}_0$ kommutiert:



(Dabei ist π_i die Projektion auf den Koeffizienten bei T^i).

Wie üblich findet man, daß, falls $(\Gamma(M), \gamma)$ und $(\Gamma'(M), \gamma')$ beide

(U) erfüllen, ein R-Algebra-Isomorphismus F existiert, so daß für alle i aus $\mathbb{N}_o$



kommutiert. $(\Gamma(M),\gamma)$ wird also durch (U) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

1.1.1. SATZ: Es gibt bis auf Isomorphie genau ein Paar $(\Gamma(M),\gamma)$, das (U) erfüllt.

1.1.2. KONVENTION: Soll die Abhängigkeit vom Grundring R betont werden, so wird $\Gamma^R(M)$ an Stelle von $\Gamma(M)$ geschrieben. Diese Konvention wird in ähnlicher Form auf alle Grundring-abhängigen Konstruktionen in dieser Arbeit angewendet.

1.1.3. DEF.: $\Gamma(M)$ aus Satz 1.1.1. heißt die "Algebra der dividierten Potenzen". Nach [Rob 63]1, Ch.III 1, ist $\Gamma(M)$ die kommutative R-Algebra mit Erzeugenden $m^{[i]}$ $(i\in\mathbb{N}_o, m\in M)$ und Relationen $(\forall\, m,n\in M;\ k,l\in\mathbb{N}_o;\ \lambda\in R)$:

(1) $m^{[0]} = 1$

(2) $(\lambda m)^{[k]} = \lambda^k (m^{[k]})$

(3) $m^{[k]} m^{[l]} = [k,l]\ m^{[k+l]}$

(4) $(m+n)^{[k]} = \sum_{i+j=k} m^{[i]} n^{[j]}$.

$\underline{\gamma}: M \longrightarrow \varepsilon(\Gamma(M))$ hat folgendes Aussehen: $\gamma(m) := \sum_{i\in\mathbb{N}_o} m^{[i]} T^i \quad \forall m\in M$.●

Mit der Definition $F(m^{[i]}) := \pi_i(f(m))$ sieht man, wenn f R-Modul-Hom. ist, aus der Definition von $\varepsilon(A)$ sofort, daß $(\Gamma(M),\gamma)$ (U) erfüllt und damit die Existenzaussage von Satz 1.1.1 gilt. Tatsächlich wird sogar für jede kommutative R-Algebra A $\mathrm{Hom}(M,\varepsilon(A))$ so bijektiv auf $\mathrm{Alg}(\Gamma(M),A)$ abgebildet ([Rob 63]1, Th.III 1)

1.2. Zum besseren Verständnis, sollen hier noch einige weitere Fakten über $\Gamma(M)$ angegeben werden (vgl. [Rob 63]):

1.2.1. $\Gamma(M)$ wird als R-Modul erzeugt von Elementen $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}$, wobei I eine beliebige Indexmenge sein darf, $m_i \in M$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_o$, für alle $i\in I$, und $\sum_{i\in I} \alpha_i < \infty$ sein muß. $\prod_{i\in I} m_i^{[0]} = 1_{\Gamma(M)}$.

1.2.2. KONVENTION: a) Die Aussage $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$ soll im Folgenden stets $\alpha_i \in \mathbb{N}_o$ $(\forall i\in I)$ implizieren (sofern nicht ausdrücklich irgendwelche Schranken für die α_i gefordert werden). In jedem Fall soll dann $|\alpha| = \sum_{i\in I} \alpha_i < \infty$ sein.
b) Trotz der Festsetzung von a) können im Laufe von Rechnungen in $\Gamma(M)$ oder als deren Ergebnisse Ausdrücke $\prod_{i\in I} m_i^{[\beta_i]}$ auftreten, in denen die β_i, etwa als Rechenausdrücke in natürlichen Zahlen, auch negative Werte annehmen. In diesen Fällen wird $\prod_{i\in I} m_i^{[\beta_i]} := 0$ gesetzt !

1.2.3. $\Gamma(M)$ ist $\mathbb{N}_o$- ($\mathbb{Z}$-) graduierte Algebra, $\Gamma(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_o} \Gamma_k(M)$ (also $\Gamma_k(M)=0$ für $k<0$). $x := \prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M) \Longrightarrow (x\in\Gamma_k(M) \Leftrightarrow |\alpha| = k)$. $\pi_k : \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma_k(M)$ sei die kan. Projektion und $\iota_k : \Gamma_k(M) \longrightarrow \Gamma(M)$ die kan. Einbettung.

1.2.4. $\Gamma_0(M) \cong R$; $\Gamma_1(M) \cong M$. Es gilt: $1_{\Gamma(M)} = 1_R$.

1.2.5. KONVENTION: Die isomorphen Moduln in 1.2.4. werden häufig stillschweigend identifiziert.

1.2.6. Ist $\{b_i\}_{i\in I}$ Basis des R-Moduls M, so ist die Menge $\{ \prod_{i\in I} b_i^{[\alpha_i]} \mid |\alpha| := \sum_{i\in I} \alpha_i = k \}$ Basis von $\Gamma_k(M)$ ([Rob 63]). ■

1.2.7. Ist R ein Körper der Charakteristik 0 und $\{a_1 < a_2 < \ldots\}$ eine angeordnete Basis des R-Vektorraums V, so ist

$\{a_{i_1}^{[1]} a_{i_2}^{[1]} \ldots a_{i_k}^{[1]} \mid i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}$ Basis von $\Gamma_k(V)$ ([Rob 63]) ■

1.2.8. Ist R ein Körper der Charakteristik p>0 und $\{e_i\}_{i \in I}$ Basis des R-Vektorraums M, so ist

$$\{ \prod_{i \in I} \prod_{h \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{(\alpha_{ih})!} (e_i^{[p^h]})^{\alpha_{ih}} \mid 0 \leq \alpha_{ih} < p, \sum_{i,h} \alpha_{ih} p^h = k \}$$

Basis von $\Gamma_k(M)$. (Folgt aus 1.2.6. und [Rob 63] Prop.1, AppI) ■

Die universelle Eigenschaft von $\Gamma(M)$ liefert sofort auch die Funktoreigenschaft von Γ.

1.2.9. DEF.: Zu $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ mit M,N aus R-MOD sei $\underline{\underline{\Gamma(f)}}: \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(N)$ der eindeutig bestimmte R-Algebra-Hom. mit $m^{[i]} \longrightarrow f(m)^{[i]}$ $(\forall m \in M, \forall i \in \mathbb{N}_0)$: $\Gamma(f)$ ist also graduiert vom Grad 0. $\underline{\underline{\Gamma_k(f)}} := \Gamma(f)|_{\Gamma_k(M), \Gamma_k(N)}$.

1.2.10. $\forall f \in \mathrm{Hom}(M,N)$: $\Gamma_0(f) = \mathrm{id}_R$.

1.2.11. KONVENTION: Häufig wird $\Gamma(f)$ geschrieben, wo genauer $\Gamma_k(f)$ stehen müßte. Analoge Regelungen gelten auch für andere Funktoren in eine Kategorie graduierter R-Moduln.

1.2.12. SATZ: ([Rob 63] III 3) Es existiert genau ein S-Algebra-Hom. (S kommutative R-Algebra!)
$\underline{\underline{\upsilon^{RS}}}: \Gamma^R(M) \otimes_R S \longrightarrow \Gamma^S(M \otimes_R S)$ mit $m^{[i]} \otimes 1_S \longmapsto (m \otimes 1_S)^{[i]}$ ■

1.3. Für (G,+)- (G := $\mathbb{N}_0$) graduierte R-Algebren $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ und $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ gelten die folgenden trivialen Aussagen:

1.3.1. $\prod_{g \in G} A_g$ ist R-Algebra, wenn man die Multiplikation μ_A durch die Definition $(a_g)_{g \in G} \cdot (b_h)_{h \in G} := (\sum_{g+h=k} \mu_A(a_g \otimes b_h))_{k \in G}$ auf das Produkt fortsetzt. A ist dann Subalgebra.

$\prod_{g \in G} A_g$ werde auch mit $\underline{\underline{\overline{A}}}$ und die Fortsetzung von μ_A auch mit $\underline{\underline{\overline{\mu_A}}}$ bezeichnet.

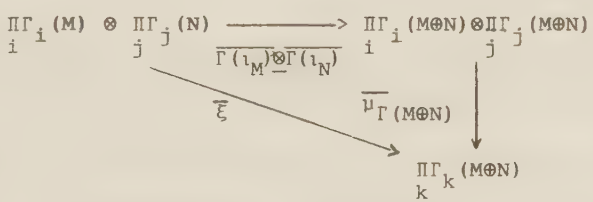
1.3.2. Ist $F: A \longrightarrow B$ graduierter R-Algebra-Hom. vom Grad 0, $\underline{F_g}: A_g \longrightarrow B_g$ die Einschränkung von F auf die zu g gehörige homogene Komponente, so ist $(F_g)_{g\in G}: \prod_{g\in G} A_g \longrightarrow \prod_{g\in G} B_g$ ebenfalls R-Algebra-Hom. $(F_g)_{g\ G}$ werde im Folgenden mit $\overline{\underline{F}}$ bezeichnet.

Obige Aussagen sollen jetzt auf Γ angewendet werden.

1.3.3. Sind M,N R-Moduln, $\iota_M: M \longrightarrow M\oplus N$ und $\iota_N: N \longrightarrow M\oplus N$ die kanonischen Einbettungen, so sind $\Gamma(\iota_M)$ und $\Gamma(\iota_N)$ homogene R-Algebra-Hom. vom Grad 0 und lassen sich nach 1.3.2. fortsetzen zu R-Algebra-Hom. von $\overline{\Gamma(M)}$ bzw. $\overline{\Gamma(N)}$ in $\overline{\Gamma(M\oplus N)}$.

Das Diagramm

(D_1)

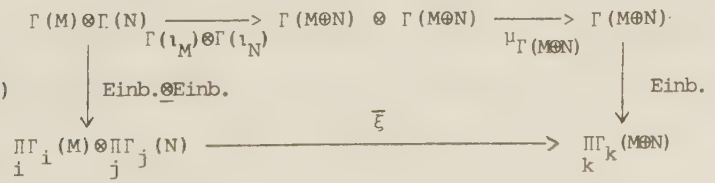


definiert einen R-Algebra-Hom $\overline{\underline{\xi}}$.

Da $\prod_i \Gamma_i(\iota_M)$ und $\prod_i \Gamma_i(\iota_N)$ und $\overline{\mu}_{\Gamma(M\oplus N)}$ natürliche Transformationen sind, gilt dies auch für $\overline{\xi}$.

Aus der Definition von $\overline{\xi}$ ergibt sich die Kommutativität des folgenden Diagramms in R-ALG:

(D_2)



1.3.4.SATZ: ([Rob 63] III 4) Es existiert ein eindeutig bestimmter R-Algebra-Isomorphismus $\underline{\xi}: \Gamma(M)\otimes\Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(M\oplus N)$

mit $m^{[i]} \otimes n^{[j]} \longrightarrow (m,0)^{[i]}(0,n)^{[j]}$, für alle i,j aus $\mathbb{N}_0$, m aus M und n aus N. ■

Es gilt (vgl. auch den Bew. von III 4 in [Rob 63]):

1.3.5. $\xi = \mu_{\Gamma(M\oplus N)} \circ \Gamma(\iota_M) \otimes \Gamma(\iota_N)$.

Ist δ: M $\longrightarrow$ M⊕M die Diagonalabbildung $m \longmapsto (m,m)$ $\forall m \in M$, so liefert die Definition

1.3.6. DEF.: $\Delta_{\Gamma(M)} := \xi^{-1} \circ \Gamma(\delta) : \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$

eine Comultiplikation auf $\Gamma(M)$ (vgl. [Rob 63]V, [Swe 69]12).

1.3.7. $\Delta_{\Gamma(M)}$ ist R-Algebra-Homomorphismus.

1.3.8. $\varepsilon_{\Gamma(M)}$: $R \cong \Gamma_0(M) \hookrightarrow \Gamma(M)$ ist ebenfalls R-Algebra-Hom. ("Coeins").

1.3.9. SATZ: $(\Gamma(M), \mu_{\Gamma(M)}, \eta_{\Gamma(M)}, \Delta_{\Gamma(M)}, \varepsilon_{\Gamma(M)})$ ist eine kommutative, cokommutative, graduierte R-Bigebra.

BEW.: Es bleibt nur zu zeigen : $\Delta_{\Gamma(M)}(\Gamma_k(M)) \subset \bigoplus_{i+j=k} \Gamma_i(M) \otimes \Gamma_j(M)$. Dies ergibt sich aus 1.3.11.. ■

1.3.10. DEF.: Für $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}_0^{(I)}$, $(\beta_j)_{j\in J} \in \mathbb{N}_0^{(J)}$ (I,J bel. Indexmengen) sei $M((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J}) :=$

$$\{(\gamma_{ij})_{i\in I, j\in J} \in \mathbb{N}_0^{(I\times J)} \mid \forall i\in I: \sum_{j\in J} \gamma_{ij} = \alpha_i \ ; \ \forall j\in J: \sum_{i\in I} \gamma_{ij} = \beta_j\} .$$

Beachte!: Für $|\alpha| \neq |\beta|$ ergibt sich die leere Menge.
Kleinere Modifikationen der Schreibweise, etwa bei endlichen oder aus dem Zusammenhang ersichtlichen Indexmengen, werden später ohne besonderen Vermerk verwendet. ●

1.3.11. $$\Delta_{\Gamma(M)}\Big(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \sum_{j+k=|\alpha|} \sum_{(\gamma_{pq})\, M((\alpha_i)_{i\in I};(j,k))} \prod_{i\in I} m_i^{[\gamma_{i1}]} \otimes \prod_{i\in I} m_i^{[\gamma_{i2}]} ,$$

für $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$.

1.3.12. LEMMA: Für alle f aus Hom(M,N) ist $\Gamma(f)$ graduierter Bigebra-Hom. vom Grad 0.

BEW.: 1) Für $\prod_i m_i^{[\alpha_i]}$ $\Gamma(M)$ gilt: $\Delta_{\Gamma(N)}\,\Gamma(f)(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}) =$

$$\Delta_{\Gamma(N)}(\prod_i f(m_i)^{[\alpha_i]}) = \sum_{p+q=|\alpha|} \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(p,q))} \prod_i f(m_i)^{[\gamma_{i1}]} \otimes \prod_i f(m_i)^{[\gamma_{i2}]} =$$

$$= \sum_{p+q=|\alpha|} \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(p,q))} \Gamma(f)(\prod_i m_i^{[\gamma_{i1}]}) \otimes \Gamma(f)(\prod_i m_i^{[\gamma_{i2}]}) =$$

$$= (\Gamma(f) \underline{\otimes} \Gamma(f)) \circ \Delta_{\Gamma(M)}(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}).$$

2) $\pi_0 \circ \Gamma(f) = \Gamma_0(f) \circ \pi_0 \underset{1.2.10.}{=} \pi_0$. Der Rest ist klar. ■

1.4. Zum Schluß noch eine

BEMERKUNG: Zu einem R- Modul-Hom. $\psi:\Gamma(M) \longrightarrow N$ gehört, unter gewissen Vorraussetzungen (*), eine Familie $(f_S)_S$ kommut. R-Alg. von Abbildungen $f_S: M \otimes S \longrightarrow N \otimes S$ ([Rob 63] IV 2). Zur Motivation und Erläuterung wird später gelegentlich f_R herangezogen. f_R hat das folgende Aussehen: $m \otimes s \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \psi(m^{[k]}) \otimes s^k \in N$. Dabei ist die Summe wegen (*) stets endlich. f_R wird hier mißbräuchlich das "zu ψ gehörige Polynomgesetz" genannt, im Gegensatz zu [Rob 63], wo das zu ψ gehörige Polynomgesetz die ganze Familie $(f_S)_S$ ist.

KAPITEL 2 : Die kanonischen Homomorphismen

$\beta_\Gamma : \Gamma(\mathrm{Hom}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma,\Gamma)$ und

$\mu_{\Gamma\Gamma}: \Gamma\otimes\Gamma \longrightarrow \Gamma\circ\otimes$; Einführung und Zusammenhänge.

2.1. Zwei wesentliche Punkte in dieser Arbeit sind :

1) Die Existenz einer R-Algebra-Struktur auf $\Gamma_i(A)$ ($i\in\mathbb{N}_0$), wenn A eine R-Algebra ist.

2) Die Existenz kanonischer Homomorphismen (F geeigneter Funktor!) $\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M),F(N))$.

Dieses Kapitel soll mit dazu beitragen, den engen Zusammenhang zwischen beiden Punkten zu klären.
Während 1) neben der Algebra-Struktur von A die Existenz eines R-Modul-Hom. $\Gamma(A)\otimes\Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(A\otimes A)$ oder allgemeiner von $\mu_{MN}:\Gamma(M)\otimes\Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(M\otimes N)$ benutzt, bedeutet 2) für den Fall $F:=\Gamma$ die Existenz von $\beta_M^N:\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(N))$.
Hier soll unter anderem gezeigt werden, daß μ_{MN} und β_M^N in gewissem Sinn zueinander adjungiert sind, gewissermaßen zwei Seiten der selben Medaille darstellen.

2.2. Für eine R-Cogebra $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ und eine R-Algebra (A,μ_A,η_A) trägt $\mathrm{Hom}(C,A)$ die Struktur einer R-Algebra mit Eins $C \xrightarrow{\varepsilon_C} R \xrightarrow{\eta_A} A$ und der folgenden Multiplikation:

2.2.1.DEF.: Durch $f*g := \mu_A\circ(f\otimes g)\circ\Delta_C$ für alle f,g aus $\mathrm{Hom}(C,A)$, wird auf $\mathrm{Hom}(C,A)$ eine assoziative Multiplikation, die "Convolution", definiert. Im Folgenden wird statt f*g auch einfach fg geschrieben; insbesondere soll $\prod_{i\in\underline{n}} f_i := f_1*f_2*\ldots*f_n$ sein und $f^k:=f^{*k}:=f*f*\ldots*f$ (k-mal).
(Zur Def. vgl. etwa [Bou 74]III 11.2 oder[Swe 69].)

ist C cokommutativ und A kommutativ, so ist $\mathrm{Hom}_R(C,A)$ kommutativ. ([Bou 74]III 11.2 Prop.2)
Insbesondere ist also $\mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(N))$, für R-Moduln M und N, eine kommutative Algebra.

2.2.2.LEMMA: Der durch $a\otimes f \longmapsto (\forall c\in C: c \mapsto f(c)a)$ $(\forall a\in A, f\in C^*)$ definierte Hom. $A \otimes (C^*,*) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C,A),*)$ ist ein R-Algebra-Hom..

BEW.: Das Bild von $a\otimes f$ sei mit $\overline{a\otimes f}$ bezeichnet. Dann gilt für $a,b\in A$; $c\in C$; $f,g\in C^*$: $\overline{a\otimes f} * \overline{b\otimes g}\ (c) = \mu_A\circ(\overline{a\otimes f} \otimes \overline{b\otimes g})\circ\Delta_C(c)) =$
$= $ (Sweedler-Notation!) $\mu_A(\sum_{(c)} \overline{a\otimes f}(c_{(1)}) \otimes \overline{b\otimes g}(c_{(2)})) =$
$= \sum_{(c)} f(c_{(1)})g(c_{(2)})ab = f*g\ (c)\cdot ab = \overline{(ab \otimes f*g)}(c) = \overline{(a\otimes f)(b\otimes g)}\ (c).$ ■

2.2.3.HILFSSATZ: Durch $f \longmapsto \sum_{i\in\mathbb{N}_\rho} \Gamma_i(f)T^i \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ wird ein R-Modul-Hom. von $\mathrm{Hom}(M,N)$ nach $\varepsilon(\mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(N)))$ definiert.

Dabei wurde von folgender Konvention Gebrauch gemacht:

2.2.4.KONVENTION: Für R-Moduln X und Y werden im Folgenden häufig (meist stillschweigend) R-Modul-Hom. $\psi_i:\Gamma_i(X) \to Y$ mit $\Gamma(X)\xrightarrow{\pi_i}\Gamma_i(X)\xrightarrow{\psi_i}Y$ und Hom. $\chi_i:X\longrightarrow\Gamma_i(Y)$ mit $X \xrightarrow{\chi_i}\Gamma_i(Y) \xrightarrow{\iota_i}\Gamma(Y)$ identifiziert. Ähnliches gilt für andere Funktoren an Stelle von Γ.

BEW. zu 2.2.3.: a) Für $x:= \prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$ gilt : $\Gamma_j(f)*\Gamma_k(f)(x) =$

$$= \sum_{(\alpha_{pq})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(j,k))} \prod_i f(m_i)^{[\alpha_{i1}]} \prod_i f(m_i)^{[\alpha_{i2}]} =$$

$$\left(\sum_{(\alpha_{pq})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(j,k))} \prod_i [\alpha_{i1},\alpha_{i2}]\right) \prod_i f(m_i)^{[\alpha_i]} =: z \prod_i f(m_i)^{[\alpha_i]}.$$

z ist Koeffizient bei $T_1^j T_2^k$ in $\prod_i (T_1+T_2)^{\alpha_i} = (T_1+T_2)^{|\alpha|}$.

$\Rightarrow z = \delta_{j+k,|\alpha|}\,[j,k] \Rightarrow \Gamma_j(f)*\Gamma_k(f)(x) =$

$= \delta_{j+k,|\alpha|}\,[j,k]\ \Gamma_{j+k}(f)\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) = [j,k]\ \Gamma_{j+k}(f)(x)$.

b) $\Gamma_0(f) = id_R = \eta_{\Gamma(N)} \circ \varepsilon_{\Gamma(M)} = 1_{Hom(\Gamma(M),\Gamma(N))}$.

c) $\Gamma_j(rf)\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \delta_{j,|\alpha|} \prod_i (rf(m_i))^{[\alpha_i]} =$

$= \delta_{j,|\alpha|}\, r^{\alpha_i} \prod_i f(m_i)^{[\alpha_i]} = r^j\, \Gamma_j(f)\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) \quad \forall \prod_i m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M), r \in R.$

d) $\Gamma_j(f+g)\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \delta_{j,|\alpha|} \prod_i (f+g(m_i))^{[\alpha_i]} =$

$= \delta_{j,|\alpha|} \sum_{p+q=|\alpha|} \sum_{(\alpha_{rs}) \in M((\alpha_i)_i,(p,q))} \prod_i f(m_i)^{[\alpha_{i1}]} \prod_i g(m_i)^{[\alpha_{i2}]} =$

$= \delta_{j,|\alpha|} \sum_{p+q=|\alpha|} \Gamma_p(f)*\Gamma_q(g)\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \sum_{p+q=j} \Gamma_p(f)*\Gamma_q(g)\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big)$ ∎

2.2.5.DEF.: Nach der universellen Eigenschaft (U) von $\Gamma(Hom(M,N))$ existiert ein eindeutig bestimmter R-Algebra-Hom. β_N^M: $\Gamma(Hom(M,N)) \longrightarrow Hom(\Gamma(M),\Gamma(N))$ mit $f^{[i]} \mapsto \Gamma_i(f)$ $\forall f \in Hom(M,N)$, $i \in \mathbb{N}_0$.

2.2.6. $\beta_N^M(\Gamma_i(Hom(M,N))) \subset Hom(\Gamma_i(M),\Gamma_i(N))$ und

$\operatorname{Im} \beta_N^M \subset \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} Hom(\Gamma_i(M),\Gamma_i(N)) \subset Hom(\Gamma(M),\Gamma(N))$.

Bezeichne die Einschränkung $\beta_N^M\big|_{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} Hom(\Gamma_i(M),\Gamma_i(N))}$ wieder mit β_N^M, ebenso die Fortsetzung $\overline{\beta_N^M}$ (vgl.1.3.2.).

2.2.7.BEM.: $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} Hom(\Gamma_i(M),\Gamma_i(N))$ ist graduierte Subalgebra von $Hom(\Gamma(M),\Gamma(N))$, wie leicht einzusehen ist; ebenso ist

$\prod_{i\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(\Gamma_i(M),\Gamma_i(N))$ R-Subalgebra. Sowohl die Einschränkung von β_N^M als auch die Fortsetzung sind R-Algebra-Homomorphismen.

2.2.8. Für $f\in\mathrm{Hom}(M,N)$ kommutieren die folgenden Diagramme in R-ALG :

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(N,L)) & \xrightarrow{\Gamma(f^*)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(M,L)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_L^N} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_L^M} \\ \mathrm{Hom}(\Gamma(N),\Gamma(L)) & \xrightarrow{\Gamma(f)^*} & \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L)) \end{array}$$

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(L,M)) & \xrightarrow{\Gamma(f_*)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(L,N)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_M^L} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_N^L} \\ \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(M)) & \xrightarrow{\Gamma(f)_*} & \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(N)) \end{array}$$

β_N^L ist also natürliche Transformation.

BEW.: (D_1): Hom(C,.) (C Cogebra!) ist Funktor von R-ALG nach R-ALG; Hom(.,A) (A Algebra!) ist Funktor von R-COG nach R-ALG. Alle Abbildungen im Diagramm sind daher R-Algebra-Hom.. Für $g\in\mathrm{Hom}(N,L)$ und $i\in\mathbb{N}_0$ ist $\beta_L^M\circ\Gamma(f^*)(g^{[i]}) = \beta_L^M(g\circ f^{[i]}) = \Gamma_i(g\circ f) = \Gamma_i(g)\circ\Gamma_i(f) = \Gamma(f)^*(\Gamma_i(g)) = \Gamma(f)^*\circ\beta_L^N(g^{[i]})$. Der Beweis von (D_2) verläuft analog. ■

Da β_M^L R-Algebra-Hom. ist wird $\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(L,M))$ abgebildet auf $\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i) \in \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(M))$. Wie wirkt nun $\prod_{i\in I}\Gamma_{\alpha_i}(f_i)$ auf $\prod_{j\in J} 1_j^{[\gamma_j]} \in \Gamma(L)$? Ist für alle $i\in I$ $\sum_{j\in J}\alpha_{ij}=\alpha_i$, so gilt: $\prod_{i\in I}(\Gamma_{\alpha_i}(f_i)(\prod_{j\in J} 1_j^{[\alpha_{ij}]})) = \prod_{i,j} f_i(1_j)^{[\alpha_{ij}]}$. Es folgt:

2.2.9.

$$\left(\prod_{i\in I}\Gamma_{\alpha_i}(f_i)\right)\left(\prod_{j\in J}l_j^{[\gamma_j]}\right)=\sum_{(\alpha_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\gamma_j)_{j\in J})}\prod_{i,j}f_i(l_j)^{[\alpha_{ij}]}.$$

Für $\prod_{i\in I}f_i^{[\alpha_i]}\in\Gamma(\mathrm{Hom}(N,L))$ und $\prod_{j\in J}g_j^{[\gamma_j]}\in\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N))$ gilt:

2.2.10.

$$\prod_{i\in I}\Gamma_{\alpha_i}(f_i)\circ\prod_{j\in J}\Gamma_{\gamma_j}(g_j)=\sum_{(\alpha_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\gamma_j)_{j\in J})}\prod_{i,j}\Gamma_{\alpha_{ij}}(f_i\circ g_j)\ .$$

BEW.: Indem man beide Seiten der behaupteten Gleichung auf $\prod_{k\in K}m_k^{[\eta_k]}\in\Gamma(M)$ anwendet, erhält man mit 2.2.9., daß es reicht, folgende Gleichheit zu beweisen:

$$\sum_{(c_{jk})\in M((\gamma_j)_{j\in J};(\eta_k)_{k\in K})}\ \sum_{(d_{i(j,k)})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(c_{jk})_{(j,k)\in J\times K})}\prod_{i,(j,k)}f_i\circ g_j(m_k)^{[d_{i(j,k)}]}=$$

$$=\sum_{(a_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\gamma_j)_{j\in J})}\ \sum_{(b_{(i,j)k})\in M((a_{ij})_{(i,j)\in I\times K};(\eta_k)_{k\in K})}\prod_{(i,j),k}f_i\,g_j(m_k)^{[b_{(i,j)k}]}$$

Es ist klar, daß sowohl die $(d_{i(j,k)})_{(i,j,k)\in I\times J\times K}$ als auch die $(b_{(i,j)k})_{(i,j,k)\in I\times J\times K}$ die Menge

$$M((\alpha_i)_{i\in I};(\gamma_j)_{j\in J};(\eta_k)_{k\in K}):=\{(x_{ijk})\in\mathbb{N}_0^{(I\times J\times K)}\mid \forall i\in I:\ \sum_{j,k}x_{ijk}=\alpha_i,\ \forall j\in J:\ \sum_{i,k}x_{ijk}=\gamma_j,\ \forall k\in K:\ \sum_{i,j}x_{ijk}=\eta_k\}$$ durchlaufen. Es folgt die Behauptung. ∎

2.3. Zunächst eine

2.3.1.DEF.: Für R-Moduln M und L sei $T^M_L:L\longrightarrow \mathrm{Hom}(M,L\,M)$ der, durch $l\longmapsto(\forall m\in M:\ m\mapsto l\otimes m)\ \ \forall l\in L$ gegebene, kanonische R-Modul-Hom..

$\alpha_L^M : \Gamma(L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L\otimes M))$ sei definiert, als Komposition $\alpha_L^M : \Gamma(L) \xrightarrow{\Gamma(T_L^M)} \Gamma(\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)) \xrightarrow{\beta^M_{L\otimes M}} \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L\otimes M))$;

dann ist α_L^M der eindeutig bestimmte R-Algebra-Hom. mit

$\alpha_L^M(1^{[i]}) = \Gamma_i(T_L^M(1))$ für alle 1 aus L und i aus $\mathbb{N}_0$.

2.3.2. Für $f\in\mathrm{Hom}(L,L')$ kommutiert folgendes Diagramm in R-ALG :

(D_3)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L\otimes M)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma(f)} & \overset{\alpha_L^M}{} & \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma(f\otimes id_M)_*} \\ \Gamma(L') & \underset{\alpha_{L'}^M}{\longrightarrow} & \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L'\otimes M)) \end{array}$$

α_L^M ist also natürliche Transformation.

BEW.: T_L^M ist nat. Transf.. Damit gilt: $\alpha^M_{L'}\circ\Gamma(f) = \beta^M_{L'\otimes M}\circ\Gamma(T^M_{L'})\circ\Gamma(f) = \beta^M_{L'\otimes M}\circ\Gamma((f\otimes id_M)_*\circ T_L^M) =$ (2.2.8.(D_2))

$= \Gamma(f\otimes id_M)_*\circ\beta^M_{L'\otimes M}\circ\Gamma(T_L^M)$. ■

α wurde mit Hilfe von β definiert. Umgekehrt läßt sich auch β aus α zurückgewinnen. Dazu zunächst:

2.3.3.DEF.: Für R-Moduln M und N sei A_M^L: $\mathrm{Hom}(L,M)\otimes L \longrightarrow M$ der, durch $f\otimes l \longmapsto f(l)$ $\forall f\in\mathrm{Hom}(L,M)$, $l\in L$ gegebene, kanonische R-Modul-Hom. (vgl. auch 2.3.6.).

2.3.4.LEMMA: Für alle R-Moduln M und N kommutiert folgendes Diagramm in R-ALG:

(D_4)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(L,M)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(\mathrm{Hom}(L,M)\otimes L)) \\ {\scriptstyle \beta^L_M}\Big\downarrow & \overset{\alpha^L_{\mathrm{Hom}(L,M)}}{\nearrow} & \\ \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(M)) & & \xleftarrow{\Gamma(A_M^L)_*} \end{array}$$

BEW.: Nach Einsetzen der Definition von α ergibt sich folgendes Diagramm, dessen Kommutativität also zu beweisen ist:

$$(D_\beta)\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(L,M)) & \xrightarrow{\Gamma(T^L_{\mathrm{Hom}(L,M)})} & \Gamma(\mathrm{Hom}(L,\mathrm{Hom}(L,M)\otimes L)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta^L_M} & & \downarrow{\scriptstyle \beta^L_{\mathrm{Hom}(L,M)\otimes L}} \\ \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(M)) & \xleftarrow{\Gamma(A^L_M)_*} & \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\Gamma(\mathrm{Hom}(L,M)\otimes L)) \end{array}$$

Alle Abbildungen sind R-Algebra-Hom.,und es reicht also Elemente $f^{[k]}$ mit f aus Hom(L,M) und $k\in\mathbb{N}_0$ zu betrachten. $\Gamma(A^L_M)_*\circ\beta^L_{\mathrm{Hom}(L,M)\otimes L}\circ\Gamma(T^L_{\mathrm{Hom}(L,M)})\ (f^{[k]}) =$ $= \Gamma(A^L_M)\circ\Gamma_k(T^L_{\mathrm{Hom}(L,M)}(f))$. Die Behauptung folgt, da $(A^L_M)_*\circ T^L_{\mathrm{Hom}(L,M)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(L,M)}$ ist (vgl. 2.3.6.). ■

Denkt man sich nun umgekehrt α^Q_P gegeben,als den eindeutig bestimmten R-Algebra-Hom. mit $\alpha^Q_P(x^{[k]}) := \Gamma_k(T^Q_P(x))\quad \forall x\in P, k\in\mathbb{N}_0$, so kann man (D_4) aus 2.3.4. als Definition von β^L_M ansehen. Um nachzuweisen, daß dann umgekehrt auch wieder 2.3.1.,d.h. $\alpha^M_L = \beta^M_{L\otimes M}\circ\Gamma(T^M_L)$,gilt, ist zu zeigen:

2.3.5.LEMMA: Folgendes Diagramm kommutiert für alle R-Moduln L und M in R-ALG:

$$(D_\alpha)\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma(L) & \xrightarrow{\Gamma(T^M_L)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^M_L} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^M_{\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)}} \\ \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L\otimes M)) & \xleftarrow{\Gamma(A^M_{L\otimes M})_*} & \mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)\otimes M)) \end{array}$$

BEW.: Da alle Abbildungen R-Algebra-Hom. sind leicht die Überlegung : $\Gamma(A^M_{L\otimes M})_*\circ\alpha^M_{\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)}\circ\Gamma(T^M_L)\ (1^{[i]}) =$ $= \Gamma(A^M_{L\otimes M})\circ\Gamma_i(T^M_{\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)}(T^M_L(1))) = \Gamma_i(A^M_{L\otimes M}\circ T^M_{\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)}(T^M_L(1))$

$= \Gamma_i(T^M_L(1)) = \alpha^M_L(1^{[i]})$, da $(A^M_{L\otimes M})_* \circ T^M_{\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)} = id_{\mathrm{Hom}(M,L\otimes M)}$ ist (vgl. 2.3.6.). ■

$(\beta^L_M)_{L,M}$ und $(\alpha^L_M)_{L,M}$ bestimmen einander also umkehrbar eindeutig. Dieser Zusammenhang ist offenbar ein ähnlich enger wie bei der Adjunktion zwischen $(T^N_M)_{N,M}$ und $(A^N_M)_{N,M}$, den "Übergangs-Homomorphismen" zwischen α und β ,selbst.

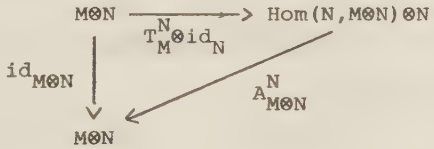
Zur Erinnerung :

2.3.6. 1) $T^N_M \in \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,M\otimes N)) \cong \mathrm{Hom}(M\otimes N, M\otimes N)$ ist der zu $id_{M\otimes N}$ gehörige (adjungierte) Homomorphismus.

2) $A^N_M \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(N,M)\otimes N, M) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(N,M),\mathrm{Hom}(N,M))$ ist der zu $id_{\mathrm{Hom}(N,M)}$ adjungierte Homomorphismus.

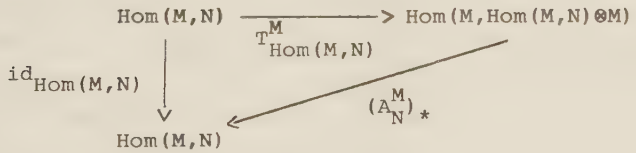
3) Es kommutieren:

(D_5)



und

(D_6)



2.4. $\alpha^M_L \in \mathrm{Hom}(\Gamma(L),\mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma(L\otimes M))) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma(L)\otimes\Gamma(M),\Gamma(L\otimes M))$

2.4.1.DEF.: Für R-Moduln L und M sei μ_{LM} das Bild von α^M_L unter obigem kanonischen Isomorphismus, also

$\mu_{LM}(x\otimes y) := \alpha^M_L(x)(y)$ für alle x aus $\Gamma(L)$ und y aus $\Gamma(M)$. ●

Genauer bildet μ_{LM} folgendermaßen ab:

Für $x := \prod_{i\in I} l_i^{[\gamma_i]} \in \Gamma(L)$ und $y := \prod_{j\in J} m_j^{[\eta_j]} \in \Gamma(M)$ gilt :

2.4.2.

$$\mu_{LM}\Big(\prod_{i\in I} l_i^{[\gamma_i]} \otimes \prod_{j\in J} m_j^{[\eta_j]}\Big) = \sum_{(a_{ij})\in M((\gamma_i)_{i\in I};(\eta_j)_{j\in J})} \prod_{i,j} (l_i \otimes m_j)^{[a_{ij}]}$$

BEW.: $\mu_L^M(x)(y) \underset{2.3.1.}{=} \beta^M_{L\otimes M}\Big(\prod_{i\in I} T_L^M(l_i)^{[\gamma_i]}\Big)(y) =$

$$= \prod_{i\in I} \Gamma_{\gamma_i}(T_L^M(l_i))(y) \underset{2.2.9.}{=} \sum_{(a_{ij})\in M((\gamma_i)_{i\in I};(\eta_j)_{j\in J})} \prod_{i,j} \big(T_L^M(l_i)(m_j)\big)^{[a_{ij}]}.$$

Es folgt die Behauptung. ■

2.4.3.FOLG.: $\mu_{LM}(\Gamma_k(L) \otimes \Gamma_k(M)) \subset \Gamma_k(L\otimes M)$.

2.4.4. Für f aus Hom(M,M') und g aus Hom(N,N') kommutiert folgendes Diagramm :

$$(D_7) \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma(M) \otimes \Gamma(N) & \xrightarrow{\mu_{MN}} & \Gamma(M\otimes N) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma(f)\,\underline{\otimes}\,\Gamma(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(f\underline{\otimes}g)} \\ \Gamma(M') \otimes \Gamma(N') & \xrightarrow{\mu_{M'N'}} & \Gamma(M'\otimes N') \end{array}$$

μ_{MN} ist also natürliche Transformation. ■

Der Beweis von 2.4.4. ergibt sich sofort aus 2.4.2.. Für die spätere Anwendung wird zusätzlich noch eine Verallgemeinerung von 2.4.4. benötigt.

2.4.5. Für alle f_i aus Hom(M,M') und g_j aus Hom(N,N') kommutiert, bei beliebigen α_i, β_j aus $\mathbb{N}_o$ mit $\sum_i \alpha_i = n = \sum_j \beta_j$, das folgende Diagramm:

(D_8)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n(M)\otimes\Gamma_n(N) & \xrightarrow{\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i)\,\underline{\otimes}\,\prod_j \Gamma_{\beta_j}(g_j)} & \Gamma_n(M')\otimes\Gamma_n(N') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{MN}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{M'N'}} \\ \Gamma_n(M\otimes N) & \xrightarrow{\sum_{(\alpha_{ij})\in M((\alpha_i);(\beta_j))} \prod_{i,j} \Gamma_{\alpha_{ij}}(f_i\otimes g_j)} & \Gamma_n(M'\,\breve{\otimes}\,N') \end{array}$$

BEW.: Für $\prod_r m_r^{[\zeta_r]} \in \Gamma_n(M)$ und $\prod_s n_s^{[\xi_s]} \in \Gamma_n(M)$ gilt:

$$\mu_{M'N'}\circ \prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i)\,\underline{\otimes}\,\prod_j \Gamma_{\beta_j}(g_j)\ \Big(\prod_r m_r^{[\zeta_s]} \otimes \prod_s n_s^{[\xi_s]}\Big) \underset{2.2.9.}{=}$$

$$= \mu_{M'N'}\Big(\sum_{\substack{(\zeta_{ir})\in M((\alpha_i)_i;(\zeta_r)_r)\\ (\xi_{js})\in M((\beta_j)_j;(\xi_s)_s)}} \prod_{i,r} f_i(m_r)^{[\zeta_{ir}]} \otimes \prod_{j,s} g_j(n_s)^{[\xi_{js}]}\Big) =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_{irjs})_{irjs} \mid \sum_{irj}\gamma_{irjs}=\xi_s\ \forall s,\ \sum_{irs}\gamma_{irjs}=\beta_j\ \forall j,\ \sum_{ijs}\gamma_{irjs}=\zeta_r\ \forall r,\ \sum_{rjs}\gamma_{irjs}=\alpha_i\ \forall i\}} \prod_{irjs} (f_i(m_r)\otimes g_j(n_s))^{[\gamma_{irjs}]}$$

Andererseits folgt mit Hilfe von 2.2.9. auch schnell, daß

$$\sum_{(\alpha_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j} \Gamma_{\alpha_{ij}}(f_i\otimes g_j)\ \Big(\sum_{(\gamma_{rs})\in M((\zeta_r)_r;(\xi_s)_s)} \prod_{r,s} m_r\otimes n_s^{[\gamma_{rs}]}\Big)$$

das gleiche Ergebnis liefert. ■

2.4.6.LEMMA: " μ ist assoziativ ", d.h. : (D_9) kommutiert.

(D_9)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L)\otimes\Gamma(M)\otimes\Gamma(N) & \xrightarrow{\mu_{LM}\,\underline{\otimes}\,id_{\Gamma(N)}} & \Gamma(L\otimes M)\otimes\Gamma(N) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id_{\Gamma(L)}\,\underline{\otimes}\,\mu_{MN}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{L\otimes M\ N}} \\ \Gamma(L)\otimes\Gamma(M\otimes N) & \xrightarrow{\mu_{L\ M\otimes N}} & \Gamma(L\otimes M\otimes N) \end{array}$$

BEW.: Folgt aus 2.4.2. mit analogen Überlegungen wie im Beweis von 2.2.10.. ■

2.4.7.LEMMA: " μ ist kommutativ ", d.h.: (D_{10}) kommutiert.

(D_{10})

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L) \otimes \Gamma(M) & \xrightarrow{\mu_{LM}} & \Gamma(L \otimes M) \\ \downarrow{\scriptstyle Tw} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(Tw)} \\ \Gamma(M) \otimes \Gamma(L) & \xrightarrow{\mu_{ML}} & \Gamma(M \otimes L) \end{array}$$

(Dabei ist für R-Moduln X und Y $\underline{\underline{Tw}}: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ gegeben durch $x \otimes y \longmapsto y \otimes x \quad \forall x \in X,\ y \in Y$.)

BEW.: Folgt aus 2.4.2., da $M((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})$ ersichtlich durch Transposition der Matrizen aus $M((\beta_j)_{j\in J};(\alpha_i)_{i\in I})$ hervorgeht und umgekehrt. ■

Neben 2.4.1. lassen sich noch andere Zusammenhänge zwischen μ und α und damit zwischen μ und β finden, die erwähnenswert sind. Zunächst läßt sich μ aus α komponieren.

2.4.8.LEMMA: Für alle R-Moduln M und N kommutieren (D_{11}) und (D_{12}).

(D_{11})

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M) \otimes \Gamma(N) & \xrightarrow{\alpha^N_M \otimes id_{\Gamma(N)}} & Hom(\Gamma(N), \Gamma(M \otimes N)) \otimes \Gamma(N) \\ & \searrow^{\mu_{MN}} & \downarrow{\scriptstyle A^{\Gamma(N)}_{\Gamma(M\otimes N)}} \\ & & \Gamma(M \otimes N) \end{array}$$

(D_{12})

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M) \otimes \Gamma(N) & \xrightarrow{\Gamma(T^N_M) \otimes id_{\Gamma(N)}} & \Gamma(Hom(N, M \otimes N)) \otimes \Gamma(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{MN}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta^N_{M\otimes N} \otimes id_{\Gamma(N)}} \\ \Gamma(M \otimes N) & \xleftarrow{A^{\Gamma(N)}_{\Gamma(M\otimes N)}} & Hom(\Gamma(N), \Gamma(M \otimes N)) \otimes \Gamma(N) \end{array}$$

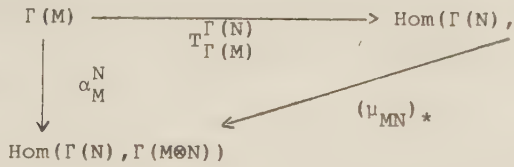
BEW.: (D_{12}) entsteht aus (D_{11}) durch einsetzen der Definition von α_M^N .

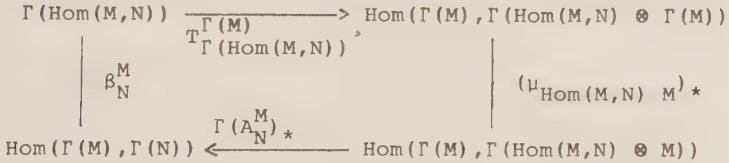
(D_{11}): $x\in\Gamma(M)$, $y\in\Gamma(N)$ $\Longrightarrow$ $A^{\Gamma(N)}_{\Gamma(M\otimes N)}\circ(\alpha_M^N \otimes id_{\Gamma(N)})\ (x\otimes y) =$

$= A^{\Gamma(N)}_{\Gamma(M\otimes N)}\circ(\alpha_M^N(x)\otimes y) = \alpha_M^N(x)(y) \underset{2.4.1.}{=} \mu_{MN}(x\otimes y)$ ■

Umgekehrt lassen sich auch α und β aus μ komponieren :

2.4.9.LEMMA: Für alle R-Moduln M und N kommutieren (D_{13})u.(D_{14}):





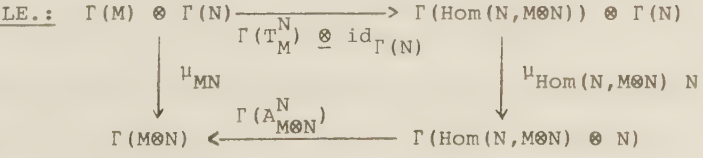
BEW.: Ersetzt man in (D_{14}) β_N^M mit Hilfe von Lemma 2.3.4., so folgt das resultierende Diagramm sofort aus (D_{13}).

(D_{13}): $x\in\Gamma(M)$, $y\in\Gamma(N)$ $\Longrightarrow$ $((\mu_{MN})_*\circ T^{\Gamma(N)}_{\Gamma(M)}(x))(y) =$

$= \mu_{MN}\circ(T^{\Gamma(N)}_{\Gamma(M)}(x))(y) = \mu_{MN}(x\otimes y) = \alpha_M^N(x)(y)$. ■

Zum Abschluß soll noch für μ das Analogon zu (D_α) und (D_β) bewiesen werden.

2.4.10.LE.:



kommutiert.

BEW.: $x\in\Gamma(M)$, $y\in\Gamma(N) \Longrightarrow \Gamma(A^N_{M\otimes N})\circ u_{Hom(N,M\otimes N)\,N}\circ\Gamma(T^N_M)\otimes id_{\Gamma(N)}(x\otimes y) =$

$= \Gamma(A^N_{M\otimes N})\,(\,\alpha^N_{Hom(N,M\otimes N)}(\Gamma(T^N_M)(x))\,(y)\,) =$ (2.4.1.)

$= \Gamma(A^N_{M\otimes N})_*\circ\alpha^N_{Hom(N,M\otimes N)}\circ\Gamma(T^N_M)(x)\,(y) = \beta^N_{M\otimes N}\circ\Gamma(T^N_M)(x)\,(y) =$ (2.3.4.) (2.3.1.)

$= \alpha^N_M(x)(y) = u_{MN}(x\otimes y)$. (2.4.1.) ■

2.4.11.DEF.: In den folgenden Kapiteln wird β^N_M meistens mit $\underline{\underline{\beta_\Gamma}}$ bezeichnet. β_Γ hat die homogenen Komponenten $\underline{\underline{\beta_{\Gamma i}}}$ aus $Hom(\Gamma_i(N),\Gamma_i(M))$, wenn die Argumente N und M sind (!).

KAPITEL 3 : Die Algebra $(\Gamma_m(A),\tau)$; Einführung und einige Eigenschaften.

In [Berg 65] werden "Formen vom Grad m auf einem R-Modul M mit Werten in einem R-Modul N" definiert über zugehörige Linearformen von einem Untermodul $\mathfrak{G}\subset T_m(M)$ nach N. Wie in Kapitel 6) noch gezeigt werden wird, ist $\mathfrak{G}$ gerade das Bild von $\Gamma_m(M)$ unter dem kanonischen Homomorphismus von $\Gamma(M)$ nach T(M) (vgl. [Rob 63] Prop.III 1) und für flache M sogar isomorph zu $\Gamma_m(M)$.

In [Berg 65] werden insbesondere auch "multiplikative Formen" eingeführt, die dann in [Berg 66] und [Berg 68] dazu dienen, Hauptnormen gewisser Algebren und speziell die Determinante von endlich-erzeugt projektiven Moduln zu untersuchen und als spezielle multiplikative Formen zu charakterisieren.

Unter anderem wird dabei für den Fall, daß M=A eine R-Algebra ist, die multiplikative Abgeschlossenheit von $\mathfrak{G}$ festgestellt ([Berg 65]3.). $\mathfrak{G}$ ist somit, da auch das Einselement der R-Algebra $T_m(A)$ enthalten ist, R-Subalgebra von $T_m(A)$. Multiplikative Formen vom Grad m auf A mit Werten in einer R-Algebra B sind im wesentlichen gerade R-Algebra-Homomorphismen $\mathfrak{G}$——>B. Aus der Definition von $\mathfrak{G}$ ergibt sich unmittelbar, wie eine R-Algebra-Struktur auf $\Gamma_m(A)$ aussehen muß, damit der kanonische Epimorphismus $\Gamma_m(A)$ —>$\mathfrak{G}$ R-Algebra-Homomorphismus wird.
Inzwischen wurde in [Rob 80] auch eine R-Algebra-Struktur auf $\Gamma_m(A)$ definiert. Beide Strukturen stimmen überein.
Diese Algebra-Struktur soll nun hier eingeführt und betrachtet werden, im Hinblick auf spätere Anwendungen im Zusammenhang mit der Determinante. Wesentliches Hilfsmittel, wie auch in [Rob 80], ist der kanonische Homomorphismus μ_{AA} aus Kapitel 2.4..

3.1. (A,μ_A,η_A) sei eine R-Algebra, k ein Element aus $\mathbb{N}_0$.

3.1.1.DEF.: $\mu_{\Gamma(A)}$ sei der durch
$\tilde{\mu}_{\Gamma(A)}: \Gamma(A) \otimes \Gamma(A) \xrightarrow[\mu_{AA}]{} \Gamma(A \otimes A) \xrightarrow[\Gamma(\mu_A)]{} \Gamma(A)$ gegebene R-Modul-Homomorphismus. $\mu_{Ak} := \tilde{\mu}_{\Gamma(A)}\big|_{\Gamma_k(A)\otimes\Gamma_k(A),\Gamma_k(A)}$ (vgl.2.4.3.).
Weiter sei η_{Ak} der durch $\eta_{Ak}: R \cong \Gamma_k(R) \xrightarrow[\Gamma(\eta_A)]{} \Gamma_k(A)$
$1_R \mapsto 1_R^{[k]}$
gegebene R-Modul-Homomorphismus.
(Nach den üblichen Identifizierungen gilt ersichtlich $\mu_{A1}=\mu_A$ und $\eta_{A1}=\eta_A$.)

3.1.2.SATZ: Für alle k aus $\mathbb{N}_0$ ist $(\Gamma_k(A), \mu_{Ak}, \eta_{Ak})$ R-Algebra.

BEW.: a) Sind $x,y,z \in \Gamma_k(A)$, dann gilt: $\mu_{Ak}(x \otimes \mu_{Ak}(y \otimes z)) =$

$= \mu_{Ak}(x \otimes (\Gamma_k(\mu_A) \circ \mu_{AA}(y \otimes z))) =$

$= \Gamma_k(\mu_A) \circ \mu_{AA} \circ (\Gamma_k(id) \underline{\otimes} \Gamma_k(\mu_A))(x \otimes \mu_{AA}(y \otimes z)) \underset{\mu_{AA}\text{nat.Transf.}}{=}$

$= \Gamma_k(\mu_A) \circ \Gamma_k(id \underline{\otimes} \mu_A) \circ \mu_{AA}(x \otimes \mu_{AA}(y \otimes)) =$

$= \Gamma_k(\mu_A \circ (id \underline{\otimes} \mu_A)) \circ \mu_{AA} \circ (id \underline{\otimes} \mu_{AA})(x \otimes y \otimes z).$

Analog erhält man: $\mu_{Ak}(\mu_{Ak}(x \otimes y) \otimes z) =$

$= \Gamma_k(\mu_A \circ (\mu_A \underline{\otimes} id)) \circ \mu_{AA} \circ (\mu_{AA} \underline{\otimes} id)(x \otimes y \otimes z).$

Da μ_A und μ_{AA} beide assoziativ sind (vgl.2.4.6.), folgt aus Obigem die Assoziativität von μ_{Ak}.

b) Für $x := \prod_{i \in I} a_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A)$ ist $\mu_{Ak}(x \otimes \eta_{Ak}(1_R)) = \mu_{Ak}(x \otimes 1_A^{[k]}) =$

$= \Gamma_k(\mu_A)\left(\prod_{i \in I} (a_i \otimes 1_A)^{[\alpha_i]}\right) = \prod_{i \in I} a_i^{[\alpha_i]} = x.$ Analog linksseitig. ∎

3.1.3. $1_A^{[k]}$ ist Einselement von $\Gamma_k(A)$.

Schreibt man wie üblich für $\mu_{Ak}(a^{[k]} \otimes b^{[k]})$ nur $a^{[k]}.b^{[k]} \in \Gamma_k(A)$, so besteht Verwechslungsgefahr mit $a^{[k]}b^{[k]} \in \Gamma_{2k}(A)$. Daher soll verabredet werden:

3.1.4.KONVENTION: Für $x,y \in \Gamma_k(A)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ wird $x \tau y$ statt $\mu_{Ak}(x \otimes y)$ geschrieben. $\underline{\underline{x^{\tau j}}} := x\tau x\tau \ldots \tau x$ (j-mal). Ferner soll $\underline{\underline{(\Gamma_k(A), \tau)}}$ statt $(\Gamma_k(A), \mu_{Ak}, \eta_{Ak})$ geschrieben werden.
Klammerung: $\mu_{\Gamma(A)}$ soll stärker binden als $\mu_{Ak} = \mu_{\Gamma_k(A)}$.

Für alle Elemente $\prod_{i \in I} a_i^{[\alpha_i]}$ und $\prod_{j \in J} b_j^{[\beta_j]}$ aus $\Gamma_k(A)$ gilt:

3.1.5. $\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]} \tau \prod_{j\in J} b_j^{[\beta_j]} = \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} \prod_{i,j} (a_i b_j)^{[\gamma_{ij}]}$

(folgt aus 2.4.2.)

3.1.6.BEM.: $\Gamma_k(A)$ läßt sich auch zur $\Gamma_k(R)$-Algebra machen, was jedoch nichts Neues ergibt, da $R \longrightarrow \Gamma_k(R)$ mit $r \mapsto r1_R^{[k]}$ Isomorphismus ist.

3.1.7.LEMMA: Ist A kommutative R-Algebra, so ist für jedes $k\in\mathbb{N}_0$ $\Gamma_k(A)$ kommutativ.

BEW.: Folgt unmittelbar aus der Kommutativität von μ_A und μ_{AA} (vgl. 2.4.7.). ■

3.1.8.LEMMA: Γ_k ist Funktor von R-ALG nach R-ALG.

BEW.: Es bleibt z.z.: f:A $\longrightarrow$ B R-Alg.-Hom. $\Longrightarrow$

$\Gamma_k(f):\Gamma_k(A)\longrightarrow\Gamma_k(B)$ ist R-Algebra-Hom.

a) $\Gamma_k(f)(1_A^{[k]}) = f(1_A)^{[k]} = 1_B^{[k]}$.

b) $\Gamma_k(f)(x)\,\tau\,\Gamma_k(f)(y) = \Gamma_k(\mu_A)\circ\mu_{AA}\circ(\Gamma_k(f)\underline{\otimes}\Gamma_k(f))(x\otimes y) \underset{2.4.4.}{=}$

$= \Gamma_k(\mu_A\circ f\underline{\otimes}f)\circ\mu_{AA}(x\otimes y) \underset{f\ \text{Alg.-Hom.}}{=} \Gamma_k(f)\circ\mu_{Ak}(x\otimes y)$. ■

3.1.9.LEMMA: Für alle R-Algebren A und B sowie $m\in\mathbb{N}_0$ ist $\mu_{AB} : \Gamma_m(A) \otimes \Gamma_m(B) \longrightarrow \Gamma_m(A\otimes B)$ R-Algebra-Homomorphismus.

BEW.: Zu zeigen: $\mu_{AB}\circ(\mu_{Am}\underline{\otimes}\mu_{Bm})\circ(id_{\Gamma_m(A)}\underline{\otimes}Tw\underline{\otimes}id_{\Gamma_m(B)}) =$

$=\mu_{A\otimes Bm}\circ(\mu_{AB}\underline{\otimes}\mu_{AB})$. (Vgl. 2.4.7. wegen Def. von Tw .)

$\mu_{AB}\circ(\mu_{Am}\underline{\otimes}\mu_{Bm}) = \mu_{AB}\circ(\Gamma_m(\mu_A)\underline{\otimes}\Gamma_m(\mu_B))\circ(\mu_{AA}\underline{\otimes}\mu_{BB}) \underset{2.4.4.}{=}$

$\Gamma_m(\mu_A\underline{\otimes}\mu_B)\circ\mu_{AB}\circ(\mu_{AA}\underline{\otimes}\mu_{BB})$

$\mu_{A\otimes Bm} = \Gamma_m(\mu_{A\otimes B})\circ\mu_{A\otimes B\ A\otimes B} = \Gamma_m(\mu_A \underline{\otimes} \mu_B)\circ\Gamma_m(id_A \underline{\otimes} Tw \underline{\otimes} id_B)\circ\mu_{A\otimes BA\otimes B}$

Es bleibt zu zeigen: $\mu_{AB}\circ(\mu_{AA} \underline{\otimes} \mu_{BB})\circ(id_{\Gamma_m(A)} \underline{\otimes} Tw \underline{\otimes} id_{\Gamma_m(B)}) =$

$= \Gamma_m(id_A \underline{\otimes} Tw \underline{\otimes} id_B)\circ\mu_{A\otimes B\ A\otimes B}\circ(\mu_{AB} \underline{\otimes} \mu_{AB})$. Dies ergibt sich schrittweise aus der Assoziativität und Kommutativität von μ_{MN}. ■

3.1.10.LEMMA: Für alle $k\in\mathbb{N}_o$ ist die Einschränkung

$\underline{\underline{\nu_k^{RS}}} := \nu^{RS}\big|_{\Gamma_k^R(A)\otimes S,\Gamma_k^S(A\otimes S)} : \Gamma_k^R(A) \otimes_R S \longrightarrow \Gamma_k^S(A \otimes_R S)$ - des für eine kommutative R-Algebra S in 1.2.12. definierten S-Algebra-Hom. ν^{RS} - ein S-Algebra-Homomorphismus (bzgl. τ).

BEW.: $\nu_k^{RS}((\prod_i a_i^{[\alpha_i]}\otimes 1_S)\tau(\prod_j b_j^{[\beta_j]}\otimes 1_S)) =$

$= \nu_k^{RS}\Big(\sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j} a_i b_j^{[\gamma_{ij}]}\otimes 1_S\Big) =$

$= \sum_{(\gamma_{ij})} \prod_{i,j} (a_i b_j\otimes 1_S)^{[\gamma_{ij}]} = \sum_{(\gamma_{ij})} \prod_{i,j} (a_i\otimes 1_S)(b_j\otimes 1_S)^{[\gamma_{ij}]} =$

$= \prod_i (a_i\otimes 1_S)^{[\alpha_i]}\ \tau\ \prod_j (b_j\otimes 1_S)^{[\beta_j]}$. ■

3.1.11.LEMMA: Ist $\{e_i\}_{i\in\underline{n}}$ ein vollständiges System orthogonaler Idempotenter der R-Algebra A, dann ist für $k\in\mathbb{N}_o$

$\{e^{[\alpha]} := \prod_{i\in\underline{n}} e_i^{[\alpha_i]} \mid \sum_{i\in\underline{n}} \alpha_i = k\}$ vollständiges System orthogonaler Idempotenter von $\Gamma_k(A)$. Es gilt dann:

$\Gamma_k(A) \cong \bigoplus_{\{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_o^n \mid |\alpha|=k=|\beta|\}} e^{[\beta]}\tau\Gamma_k(A)\tau e^{[\alpha]}$ als R-Modul.

BEW.: 1) $1_A^{[k]} = \left(\sum_{i\in\underline{n}} e_i\right)^{[k]} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} \prod_i e_i^{[\alpha_i]}$

2) $\prod_{i\in\underline{n}} e_i^{[\alpha_i]} \tau \prod_{j\in\underline{n}} e_j^{[\beta_j]} = \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in\underline{n}};(\beta_j)_{j\in\underline{n}})} \prod_{i,j} e_i e_j^{[\gamma_{ij}]} =$

$= \sum_{\{(\gamma_i)_{i\in\underline{n}} \mid \gamma_i=\alpha_i \ \forall i\in\underline{n},\ \gamma_j=\beta_j \ \forall j\in\underline{n}\}} \prod_i e_i^{[\gamma_i]} =$

$e_i e_j = \delta_{ij}$

$= \delta_{\alpha,\beta} \prod_{i\in\underline{n}} e_i^{[\alpha_i]}$. ■

3.1.12.BEM.: 3.1.11. ist die allgemeine Form eines Ergebnisses in [Gre 80]. Dort wird mit der R-Algebra $\Gamma_k(M_n(R))$ gearbeitet, wobei R ein unendlicher Körper ist. Genauer wird dort eine Algebra $S_R(n,k)$ definiert, die auf Schur zurückgeführt und deshalb "Schur-Algebra" genannt wird. $S_R(n,k)$ ist isomorph zu $\Gamma_k(M_n(R))$. Die Isomorphie wird gegeben durch

$$\zeta_{i,j} \longmapsto \prod_{p,q\in\underline{n}} e_{pq}^{\left[\sum_{r\in\underline{k}} \delta(i_r,j_r),(p,q)\right]} \quad \forall i,j\in\underline{n}^{\underline{k}}.$$

Die orthogonalen Idempotente $e^{[\alpha]}$ ($|\alpha|=k$) werden dort benutzt um zu einem $S_R(n,k)$-Modul die sogenannten Gewichtsräume zu definieren.

Zum Schluß des Kapitels sei noch erwähnt, daß mit den $(\Gamma_k(A),\tau)$ natürlich auch $\left(\underline{\prod_{k\in\mathbb{N}_o} \Gamma_k(A),\tau}\right) := \left(\prod_{k\in\mathbb{N}_o} (\Gamma_k(A),\tau)\right)$ R-Algebra ist mit Einselement $(1_A^{[k]})_{k\in\mathbb{N}_o}$. $\Gamma(A) \subset \prod_k \Gamma_k(A)$ ist zwar multiplikativ abgeschlossen, enthält aber die Eins nicht. In Kapitel 9) wird gezeigt werden, daß $\Gamma(A)$ aber auch zu einer R-Subalgebra von $(\prod_k \Gamma_k(A),\tau)$ isomorph ist.

Für den in 1.3.3. definierten R-Modul-Hom. $\overline{\xi}$ gilt, wenn man M und N durch R-Algebren A und B ersetzt:

3.1.13. $\overline{\xi}:(\prod_i \Gamma_i(A),\tau)\otimes(\prod_j \Gamma_j(B),\tau)\longrightarrow(\prod_k \Gamma_k(A\oplus B),\tau)$ ist ein R-Algebra-Homomorphismus.

BEW.: $\iota_A:A\longrightarrow A\oplus B$ und $\iota_B:B\longrightarrow A\oplus B$ seien wieder die kan. Einbettungen. Für $x_i,x_i'\in\Gamma_i(A)$ und $y_j,y_j'\in\Gamma_j(B)$ gilt:

$((x_i)_i\otimes(y_j)_j)\tau((x_i')_i\otimes(y_j')_j) = (x_i\tau x_i')_i\otimes(y_j\tau y_j')_j \xrightarrow[\xi]{}$

$(\sum_{i+j=k}\iota_A(x_i\tau x_i')\cdot\iota_B(y_j\tau y_j'))_k$. Andererseits hat man:

$(x_i)_i\otimes(y_j)_j \xmapsto[\overline{\xi}]{} (\sum_{i+j=k}\iota_A(x_i)\,\iota_B(y_j))_k$ und

$(\sum_{i+j=k}\iota_A(x_i)\iota_B(y_j))_k\,\tau\,(\sum_{r+s=k}\iota_A(x_r')\iota_B(y_s'))_k =$

$= (\sum_{\substack{i+j=k\\ r+s=k}}\iota_A(x_i)\iota_B(y_j)\,\tau\,\iota_A(x_r')\iota_B(y_s'))_k$.

Wegen der Form der Elemente $\iota_A(.)$ und $\iota_B(.)$ ist klar, daß beim Ausmultiplizieren die $\iota_A(.)$ zusammenkommen müssen und ebenso die $\iota_B(.)$. Von 0 Verschiedenes kann sich also nur für r=i und s=j ergeben, womit als Ergebnis $(\sum_{i+j=k}\iota_A(x_i)\iota_B(y_j)\,\tau\,\iota_A(x_i')\iota_B(y_j'))_k$ herauskommt. ■

KAPITEL 4 : A-Algebra-Moduln unter dem Funktor Γ_k ; Einführung und Anwendung auf β_Γ.

A sei wieder R-Algebra, M ein Rechts-A-Algebra-Modul; d.h.:
Es existiert ein R-Modul-Hom. ${}_M\omega_A$: M⊗A ⟶ M (R-Modul) mit

1) ${}_M\omega_A(m\otimes 1_A) = m$ für jedes m aus M, und
2) ${}_M\omega_A \circ (id_M \underline{\otimes} \mu_A) = {}_M\omega_A \circ ({}_M\omega_A \underline{\otimes} id_A)$.

4.1.1.DEF.: Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $\underline{\underline{{}_M\omega_{Ak}}}$ der folgende R-Modul-Hom.:

${}_M\omega_{Ak}$: $\Gamma_k(M) \otimes \Gamma_k(A) \xrightarrow{\mu_{MA}} \Gamma_k(M\otimes A) \xrightarrow{\Gamma_k({}_M\omega_A)} \Gamma_k(M)$.

Es gilt ${}_M\omega_{A1} = {}_M\omega_A$.

4.1.2.SATZ: $(\Gamma_k(M), {}_M\omega_{Ak})$ ist für jedes $k\in\mathbb{N}_0$ ein Rechts-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul.

BEW.: 2) ${}_M\omega_{Ak} \circ (id_{\Gamma_k(M)} \underline{\otimes} {}_A\omega_{Ak}) =$

$= \Gamma_k({}_M\omega_A) \circ \mu_{MA} \circ ((\Gamma_k(id_M) \underline{\otimes} \Gamma_k(\mu_A)) \circ id_{\Gamma_k(M)} \underline{\otimes} \mu_{AA}$ $\overset{2.4.4.}{=}$

$= \Gamma_k({}_M\omega_A \circ (id_M \underline{\otimes} \mu_A)) \circ \mu_{MA} \circ id_{\Gamma_k(M)} \underline{\otimes} \mu_{AA}$ $\overset{\mu \text{ assoziativ}}{=}$

$= \Gamma_k({}_M\omega_A \circ ({}_M\omega_A \underline{\otimes} id_A)) \circ \mu_{MA} \circ (\mu_{MA} \underline{\otimes} id_{\Gamma_k(A)})$ $\overset{2.4.4.}{=}$

$= {}_M\omega_{Ak} \circ ({}_M\omega_{Ak} \underline{\otimes} id_{\Gamma_k(A)})$

1) ${}_M\omega_{Ak}(\prod_i m_i^{[\alpha_i]} \otimes 1_A^{[k]}) = \Gamma_k({}_M\omega_A)(\prod_i (m_i\otimes 1_A)^{[\alpha_i]}) =$

$= \prod_i m_i^{[\alpha_i]}$ für alle $\prod_i m_i^{[\alpha_i]}$ aus $\Gamma_k(M)$. ■

Für $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(M)$, $\prod_{j\in J} a_j^{[\beta_j]} \in \Gamma_k(A)$ gilt:

4.1.3. $$\left(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}\right)\left(\prod_{j\in J} a_j^{[\beta_j]}\right) := {}_M\omega_{Ak}\left(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \otimes \prod_{j\in J} a_j^{[\beta_j]}\right) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} \prod_{i,j} (m_i a_j)^{[\gamma_{ij}]} .$$

(folgt sofort aus 2.4.2.).

4.1.4.LEMMA: Für alle Rechts-A-Algebra-Modul-Homomorphismen $f:M \longrightarrow N$ ist $\Gamma_k(f):\Gamma_k(M) \longrightarrow \Gamma_k(N)$ ein Rechts-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul-Homomorphismus. ($k\in\mathbb{N}_o$)

BEW.: ${}_N\omega_{Ak}\circ(\Gamma_k(f)\underline{\otimes}\Gamma_k(id_A)) \underset{2.4.4.}{=} \Gamma_k({}_N\omega_A)\circ\Gamma_k(f\underline{\otimes}id_A)\circ\mu_{MA} =$

$= \Gamma_k(f\circ_M\omega_A)\circ\mu_{MA} = \Gamma_k(f)\circ_M\omega_{Ak}$. ■

4.1.5. Γ_k ist demnach Funktor von Rechts-A-ALG-MOD nach Rechts-$\Gamma_k(A)$-ALG-MOD. . ■

4.1.6.BEM.: Ist speziell A=R, so stimmt die $\Gamma_k(R)$-Algebra-Modul-Struktur auf $\Gamma_k(M)$ mit der R-Struktur überein ($R\cong\Gamma_k(R)$).

4.1.7.BEM.: Natürlich gelten analoge Aussagen für Linksstrukturen.

4.1.8.BEM.: Ist nun M ein Rechts-A⊗B-Algebra-Modul (A,B R-Algebren), so trägt nach Obigem $\Gamma_k(M)$ eine Rechts-$\Gamma_k(A\otimes B)$-

-Algebra-Modul-Struktur und ist damit (3.1.9.)auch Rechts-$-\Gamma_k(A)\otimes\Gamma_k(B)$-Algebra-Modul. Man prüft leicht nach, daß die daraus resultierenden Rechts-$\Gamma_k(A)$- und Rechts-$\Gamma_k(B)$-Strukturen übereinstimmen mit den Strukturen, die man erhalten hätte, hätte man M von Anfang an nur als A- bzw. B-Algebra-Modul betrachtet.

Ist M ein Links-A-Algebra-Modul, so ist Hom(M,N) Rechts-A-Algebra-Modul via $(f\cdot a)(m):=f(am)$ $(\forall m\in M,\ f\in Hom(M,N),\ a\in A)$. In diesem Fall trägt $\Gamma_k(Hom(M,N))$ eine Rechts-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul-Struktur, $\Gamma_k(M)$ eine Links-$\Gamma_k(A)$- und damit $Hom(\Gamma_k(M),\Gamma_k(N))$ eine Rechts-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul-Struktur.

4.1.9.LEMMA: $\beta_\Gamma:\Gamma_m(Hom(M,N)) \longrightarrow Hom(\Gamma_m(M),\Gamma_m(N))$ ist Rechts-$\Gamma_m(A)$-Algebra-Modul-Homomorphismus.

BEW.: Für $\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]}\in\Gamma_m(Hom(M,N))$, $\prod_{j\in J} a_j^{[\beta_j]}\in\Gamma_m(A)$ und $\prod_{k\in K} x_k^{[\gamma_k]}\in\Gamma_m(M)$ gilt:

$$\prod_i f_i^{[\alpha_i]}\cdot\prod_j a_j^{[\beta_j]} =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j} f_i a_j^{[\gamma_{ij}]} \xmapsto{\beta_\Gamma} \sum_{(\gamma_{ij})} \prod_{i,j}\Gamma_{\gamma_{ij}}(f_i a_j).$$

$$\sum_{(\gamma_{ij})}\prod_{i,j}\Gamma_{\gamma_{ij}}(f_i a_j)\Big(\prod_k x_k^{[\gamma_k]}\Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})}\ \sum_{(\zeta_{(i,j)k})\in M((\gamma_{ij})_{(i,j)\in I\times J};(\gamma_k)_{k\in K})} \prod_{i,j,k} f_i a_j(x_k)^{[\zeta_{(i,j)k}]} =$$

$$= \sum \prod_{i,j,k} f_i(a_j x_k)^{[\zeta_{ijk}]}.$$ Dabei läuft die Summe über die

Menge aller $(\zeta_{ijk})_{(i,j,k)\in I\times J\times K}$ läuft, die den Bedingungen

1) $\sum_{i,k}\zeta_{ijk} = \beta_j \quad \forall j\in J$; 2) $\sum_{j,k}\zeta_{ijk} = \alpha_i \quad \forall i\in I$; 3) $\sum_{i,j}\zeta_{ijk} = \gamma_k$

$\forall k\in K$ genügen. Weiter ist

$$(\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i)\cdot\prod_j a_j^{[\beta_j]})(\prod_k m_k^{[\gamma_k]}) =$$

$$= \sum_{(\eta_{jk})\in M((\beta_j)_j;(\gamma_k)_k)} \prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i)(\prod_{j,k} a_j m_k^{[\eta_{jk}]}) =$$

$$= \sum_{(\eta_{jk})} \sum_{(\zeta_{i(j,k)})\in M((\alpha_i)_i;(\eta_{jk})_{(j,k)\in J\times K})} \prod_{i,j,k} f_i(a_j m_k)^{[\zeta_{ij,k)}]}.$$

Der Rest ist klar. ■

4.1.10. $\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i)\cdot\prod_j a_j^{[\beta_j]} = \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j}\Gamma_{\gamma_{ij}}(f_i a_j)$

für alle $f_i\in \mathrm{Hom}(M,N)$, $a_j\in A$ und $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j$.

Setzt man nun speziell N:=M, so gilt:

4.1.11.LEMMA: $\beta_\Gamma:(\Gamma_m(\mathrm{End}(M)),\tau) \longrightarrow (\mathrm{End}(\Gamma_m(M)),\circ)$ ist R-Algebra-Homomorphismus.

BEW.: 1) $x := \prod_i f_i^{[\alpha_i]}$, $y := \prod_j g_j^{[\beta_j]} \in \Gamma_m(\mathrm{End}M)$:

$$\beta_\Gamma(x)\circ\beta_\Gamma(y) \underset{2.2.10.}{=} \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j}\Gamma_{\gamma_{ij}}(f_i\circ g_j) =$$

$$= \beta_\Gamma(x\,\tau\,y) .$$

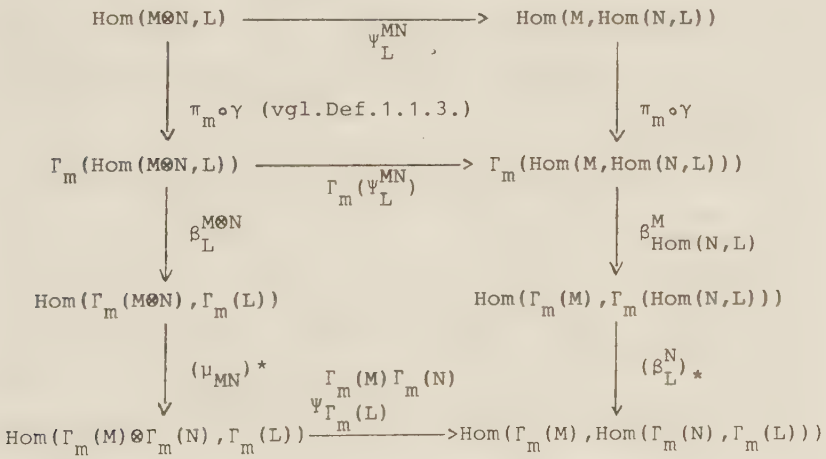
2) $\beta_\Gamma(\mathrm{id}_M^{[m]}) = \Gamma_m(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\Gamma_m(M)} = 1_{\mathrm{End}\Gamma_m(M)}$. ■

Im Folgenden soll noch auf eine alternative Möglichkeit $\Gamma_m(A)$-Algebra-Moduln einzuführen eingegangen werden. Ein Links-A-Algebra-Modul N wird definiert durch einen R-Algebra-Hom. A——>EndN, der zu ${}_A\omega_N : A \otimes N \longrightarrow N$ adjungiert ist.

4.1.12.DEF.: Für R-Moduln M,N,L sei

Ψ_L^{MN} : $\mathrm{Hom}(M \otimes N, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,L))$ der kanonische R-Modul-Isomorphismus. ($\Psi_L^{MN}(f)(m)(n) := f(m \otimes n)$ für alle f aus $\mathrm{Hom}(M \otimes N, L)$ und $m \in M$, $n \in N$)

4.1.13.LEMMA: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ kommutiert folgendes Diagramm:



BEW.: Das obere Diagramm kommutiert nach Definition des Funktors Γ . Weiter gilt für

$$x := \prod_{i \in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_m(\mathrm{Hom}(M \otimes N, L)), \quad y := \prod_{j \in J} l_j^{[\beta_j]} \in \Gamma_m(L) \quad \text{und}$$

$z := \prod_{k\in K} z_k^{[\gamma_k]} \in \Gamma_m(M) : \Psi^{\Gamma_m(M)\Gamma_m(N)}_{\Gamma_m(L)} \circ (\mu_{MN})_* \circ \beta_L^{M\otimes N}(x)(y)(z) =$

$= \mu_{MN} \circ \beta_L^{M\otimes N}(x)(y\otimes z) = \prod_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(f_i)(\mu_{MN}(y\otimes z)) =$

$= \sum \prod_{i,j,k} f_i(l_j\otimes z_k)^{[\zeta_{ijk}]}$, wobei die Summe über alle

$(\zeta_{ijk})_{i,j,k}$ läuft mit 1) $\sum_{j,k} \zeta_{ijk} = \alpha_i \quad \forall i\in I$, 2) $\sum_{i,k} \zeta_{ijk} = \beta_j \quad \forall j\in J$,

3) $\sum_{i,j} \zeta_{ijk} = \gamma_k \quad \forall k\in K$.

Andererseits hat man: $(\beta_L^N)_* \circ \beta^M_{Hom(N,L)} \circ \Gamma_k(\Psi_L^{MN})(x)(y)(z) =$

$= \beta_L^N(\prod_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(\Psi^L_{MN}(f_i))(y))(z) =$

$= \beta_L^N(\sum_{(\eta_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j} (\Psi_L^{MN}(f_i)(l_j))^{[\eta_{ij}]})(z) =$

$= \sum_{(\eta_{ij})} \prod_{i,j} \Gamma_{\eta_{ij}}(\Psi_L^{MN}(f_i)(l_j))(z) = \sum \prod_{i,j} \Psi_L^{MN}(f_i)(l_j)(z_k))^{[\zeta_{ijk}]}$

Die Summation ist dabei die gleiche wie oben und die Beh. folgt. ■

Ist $f: M\otimes N \longrightarrow L$ ein R-Modul-Hom., so hat $(\mu_{MN})_* \circ \beta_L^{M\otimes N} \circ \pi_m \circ \gamma(f) : \Gamma_m(M)\otimes\Gamma_m(N) \longrightarrow \Gamma_m(L)$ genauer folgendes Aussehen: $\Gamma_m(M)\otimes\Gamma_m(N) \xrightarrow[\mu_{MN}]{} \Gamma_m(M\otimes N) \xrightarrow[\Gamma_m(f)]{} \Gamma_m(L)$.

Also gilt:

<u>4.1.14.</u> $\Psi^{\Gamma_m(M)\Gamma_m(N)}_{\Gamma_m(L)} (\Gamma_m(f)\circ\mu_{MN}) = \beta_L^N \circ \Gamma_m(\Psi_L^{MN}(f))$.

Ist speziell M:=A R-Algebra und L:=N Links-A-Algebra-Modul, $f = {}_A\omega_N : A\otimes N \longrightarrow N$ der die A-Algebra-Modul-Struktur auf N

definierende R-Modul-Hom., so gilt:

4.1.15. 1) $\Psi_N^{AN}({}_A\omega_N)$: A ——>EndN gegeben durch a ⟼ ($\forall n\in N$: n ⟼>f(a⊗n)=an) $\forall a\in A$,ist gerade der R-Algebra-Hom., der die R-Algebra-Modul-Struktur auf N liefert.

2) $\Gamma_m({}_A\omega_N)\circ\mu_{AN} = {}_A\omega_{Nm} : \Gamma_m(A)\otimes\Gamma_m(N) \longrightarrow \Gamma_m(N)$

liefert die $\Gamma_m(A)$-Algebra-Modul-Struktur auf $\Gamma_m(N)$.

3) $\Gamma_m(A) \xrightarrow[\Gamma_m(\Psi_N^{AN}({}_A\omega_N))]{} \Gamma_m(\mathrm{End}N) \xrightarrow[\beta_N^N]{} \mathrm{End}\Gamma_m(M)$

ist nach 4.1.14. gerade $\Psi_{\Gamma_m(L)}^{\Gamma_m(A)\Gamma_m(N)}({}_A\omega_{Nm})$, also der R-Algebra-Hom., der die $\Gamma_m(A)$-Algebra-Modul-Struktur auf $\Gamma_m(N)$ definiert.

KAPITEL 5 : Die Kombinatorik der freien Algebra $R\{X_k\}_k$ und ihrer verschiedenen Strukturen.

Da man in wichtigen Fällen in dem kanonischen Homomorphismus $\Gamma(M) \longrightarrow T(M)$ ([Rob 63]Prop.III 1) eine Einbettung von $\Gamma(M)$ in die Tensoralgebra T(M) hat, ist es sinnvoll und auch nötig, sich dort Dinge klar zu machen, die bisher bewußt nur für $\Gamma(M)$ behandelt worden sind.
Hierfür reicht es, sich auf den Fall $M = R[X]^+ \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} RX^i$ zu beschränken, da man durch "Spezialisierung" $X^i \longmapsto m_i\in M$ Aussagen für $T(R[X]^+)$ leicht auf T(M) überträgt. Andererseits hat man den Vorteil, in $T(R[X]^+)$ mit Basisdarstellungen arbeiten zu können. Für die Gleichheit von

Tensorausdrücken lassen sich so notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, während man sich in T(M) in der Regel mit hinreichenden Kriterien begnügen müßte, und Äquivalenzumformungen so nicht möglich wären.
Die Betrachtungen dieses Kapitels haben durchweg kombinatorischen Charakter.

5.1. $R[X]$ bezeichne den kommutativen Polynomring über R in einer Unbestimmten X, $R[X]^+$ das von X erzeugte Ideal. $R[X]^+$ ist der Kern der Coeins $\varepsilon_{R[X]}$, wenn man $R[X]$ in üblicher Weise ($X \mapsto X\otimes 1+1\otimes X$) als Bigebra betrachtet (vgl.etwa [Gei 77] oder [Jon/Rot 79]). Es gilt: $\varepsilon_{R[X]}\circ\eta_{R[X]} = id_R$.
Der direkte Summand $R[X]^+$ von $R[X]$ ist ein freier R-Modul mit Basis $B := \{X^i \mid i\in\mathbb{N}\}$. Die k-te ($k\in\mathbb{N}_o$) homogene Komponenete $T_k(R[X]^+)$ der Tensoralgebra $T(R[X]^+)$ ist ein freier R-Modul mit Basis

$$\underline{B_k} := \{\underline{\underline{X}}^\beta := X^{\beta_1}\otimes X^{\beta_2}\otimes\ldots\otimes X^{\beta_k} \mid \beta := (\beta_1,\ldots,\beta_k)\in\mathbb{N}^k\}.$$

Für k=0 gelte dabei die Konvention $B_0 := \{1_R\}$. Offenbar ist $B_1 = B$. $T(R[X]^+)$ wird als R-Algebra erzeugt von den Elementen aus B.
Für einen beliebigen R-Modul M sei noch die Bezeichnung $\underline{\underline{T^+(M)}}$ für $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} T_i(M)$ fixiert.

5.1.1.SATZ: a) Für alle R-Moduln M und Elemente m_i aus M ($i\in\mathbb{N}$) existiert genau ein graduierter R-Algebra-Hom. vom Grad O $\underline{\underline{t((m_i)_i)}}: T(R[X]^+) \longrightarrow T(M)$ mit $X^i \longmapsto m_i$.
b) Für alle R-Algebren A und Elemente a_i aus A ($i\in\mathbb{N}$) existiert genau ein R-Algebra-Hom. $\underline{\underline{\bar{t}((a_i)_i)}}: T(R[X]^+) \longrightarrow A$ mit $X^i \longrightarrow a_i$.

BEW.: Durch $X^i \longmapsto m_i$ (bzw. a_i) wird ein R-Modul-Hom. $t:R[X]^+ \longrightarrow M$ (bzw. A) definiert. Der Rest folgt aus [Bou 74] III §5.1 Prop.1 . ■

5.1.2.KOROLLAR: Durch $X^i \longmapsto X_i$ wird ein R-Algebra-Isomorphismus von $T(R[X]^+)$ auf die freie R-Algebra $R\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in nicht kommutierenden Unbestimmten X_i definiert.

BEW.: Folgt aus 5.1.1. b), da dort gerade die $R\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kennzeichnende universelle Eigenschaft behauptet wird. ■

Ein Element $\overline{X}$ aus B_k wird charakterisiert durch die Angabe (für alle $l\in\mathbb{N}$) an welchen "Stellen" $i\in\underline{k}$ von $\overline{X}$ das Element X^l aus B auftritt, also durch eine (Mengen-) Partition der Menge $\underline{k}$ in eine Familie $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen. Dies soll im Folgenden noch etwas exakter formuliert werden.

5.1.3.DEF.: Für eine beliebige Indexmenge I und $\alpha:=(\alpha_i)_{i\in I}$ aus $\mathbb{N}_o^{(I)}$ mit $|\alpha|:=\sum_{i\in I}\alpha_i$ sei

$$\underline{\underline{P((\alpha_i)_{i\in I})}}:=\{(U_i)_{i\in I} \mid U_i\subset\underline{|\alpha|},\ |U_i|=\alpha_i\ \forall i\in I,\ U_i\cap U_j=\emptyset\ \forall i\neq j\in I\}$$

Ist $|\alpha|=m$, so soll auch $\underline{\underline{P_m((\alpha_i)_{i\in I})}}$ oder $\underline{\underline{P_{m,I}((\alpha_i)_i)}}$ statt $P((\alpha_i)_{i\in I})$ geschrieben werden.
Ein Element $(U_i)_i$ aus $P((\alpha_i)_{i\ I})$ heißt "(Mengen-) Partition von $\underline{m}$ ", die U_i heißen "Blöcke" und die $|U_i|$ "Blocklängen" der Partition.

$$\underline{\underline{P_{m,I}}} := \bigcup_{\{(\alpha_i)_{i\in I}\in\mathbb{N}_o^{(I)}\,|\,|\alpha|=m\}} P_{m,I}((\alpha_i)_i) \quad .$$

Ist $I=\underline{s}$ mit $s\in\mathbb{N}$, so soll auch $\underline{\underline{P_{m,s}}}$ statt $P_{m,\underline{s}}$ und

$P_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ statt $P_m((\alpha_i)_{i\in\underline{s}})$.

Falls die Indexmenge I aus dem Zusammenhang klar ist, soll auch P_m, $P_m((\alpha_i)_i)$, $P((\alpha_i)_i)$ statt $P_{m,I}$, $P_{m,I}((\alpha_i)_i)$, $P((\alpha_i)_{i\ I})$ geschrieben werden. Weitere Abwandlungen sind möglich.

5.1.4.LEMMA: Durch $(\beta_j)_{j\in\underline{k}} \longmapsto (U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $U_l := \{j\in\underline{k} \mid \beta_j=l\}$ wird eine Bijektion von $\mathbb{N}^k$ auf $P_{k,\mathbb{N}}$ definiert, mit Umkehrabbildung

$$(U_l)_l \longmapsto \Big(\sum_{l\in\mathbb{N}} |\{j\}\cap U_l|\,l\Big)_{j\in\underline{k}}$$

BEW.: $\sum_{l\in\mathbb{N}} |\{j\}\cap U_l|\,l = m \iff j\in U_m$ und

$\sum_{l\in\mathbb{N}} |\{j\}\cap\{i\in\underline{k} \mid \beta_i=l\}|\,l = m \iff m=\beta_j$. Daraus folgt sofort die Behauptung. ■

5.1.5.DEF.: Für $U=(U_l)_l\in P_{k,\mathbb{N}}$ sei mit $\overline{X}_U$ dasjenige Element $\overline{X}^{\beta}\in B_k$ bezeichnet, für das das Bild von β unter der Bijektion aus 5.1.4. gerade U ist. Dann gilt gerade:

5.1.6. $\beta_j = l \iff j\in U_l \qquad \forall j\in\underline{k},\ l\in\mathbb{N}$.

Aus 5.1.4. folgt sofort:

5.1.7. $B_k = \{\overline{X}_U \mid U\in P_{k,\mathbb{N}}\} \qquad \forall\, k\in\mathbb{N}$.

5.2. Für $(U_l)_l \in P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$ gibt α_l an, wie oft das Ele-

ment $X^l \in B$ in $\overline{X}_U$ auftritt. Zwei Elemente $\overline{X}_U$, $\overline{X}_V$ mit U,V aus $P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$ können sich also nur um eine Permutation der in ihnen auftretenden Elemente aus B unterscheiden.

5.2.1.DEF.: Für einen R-Modul M und $k \in \mathbb{N}_o$ wird durch

$$\overline{\rho}(m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_k) := \begin{cases} 0 & \text{falls } l \neq k \\ m_{\rho^{-1}(1)} \otimes m_{\rho^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes m_{\rho^{-1}(k)} & \text{falls } l = k \end{cases}$$

$\forall m_1, \ldots, m_l \in M$, eine Linksoperation der "Symmetrischen Gruppe Σ_k" auf T(M) definiert (vgl.etwa [Berg 65]). Σ_0 wirke als id_R.

5.2.2.BEM.: Die R-Algebra-Hom. $t((m_i)_i)$ aus 5.1.1.a) sind auch Σ_k-Homomorphismen ($\forall k \in \mathbb{N}$). Dies gilt speziell auch für die durch $X^i \longmapsto X^{i-1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ definierten R-Isomorphismen $T_k(R[X]^+) \longrightarrow T_k(R[X])$.

5.2.3.LEMMA: Für $\rho \in \Sigma_k$ und $\alpha \in \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ mit $|\alpha| = k > 0$ wird durch $\overline{\rho} : (U_l)_{l \in \mathbb{N}} \longmapsto (V_l := \{j \in \underline{k} \mid \rho^{-1}(j) \in U_l\})_l$ eine Bijektion von $P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$ auf sich definiert. Die Inverse Abbildung wird von ρ^{-1} geliefert. (Bew. trivial) ■

5.2.4.FOLG.: Für $\rho \in \Sigma_k$ und $\alpha \in \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ mit $|\alpha| = k > 0$ gilt:

a) $\overline{\rho}(\overline{X}_U) = \overline{X}_{\overline{\rho}(U)}$ $\quad \forall U \in P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$.

b) $\underline{B_\alpha} := \{\overline{X}_U \in B_k \mid U \in P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)\} \quad \Longrightarrow$

$B_\alpha = \{\overline{\rho}(\overline{X}_U) \mid U \in P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)\}$.

BEW.: b) ist eine triviale Folgerung aus a) und 5.2.3..

a) Sei $\bar{X}_U = \bar{X}^\beta = X^{\beta_1} \otimes X^{\beta_2} \otimes \ldots \otimes X^{\beta_k}$, dann folgt: $\bar{\rho}(\bar{X}_U) =$

$= X^{\beta_{\rho^{-1}(1)}} \otimes X^{\beta_{\rho^{-1}(2)}} \otimes \ldots \otimes X^{\beta_{\rho^{-1}(k)}} = \bar{X}_V$ mit $V=(V_1)_1 \underset{5.1.6.}{=}$

$= (\{j \in \underline{k} \mid \beta_{\rho^{-1}(j)} = 1\})_1 \underset{5.1.6.}{=} (\{j \in \underline{k} \mid \rho^{-1}(j) \in U_1\})_1$

Die Behauptung folgt nach Definition von $\bar{\rho}$ in 5.2.3.. ■

Sei wieder $\alpha \in \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ mit $|\alpha|=k>0$. Aus dem speziellen Element

$\underbrace{X^1 \otimes X^1 \otimes \ldots \otimes X^1}_{\alpha_1} \underbrace{\otimes X^2 \otimes \ldots \otimes X^2}_{\alpha_2} \otimes X^3 \otimes \ldots$ von B_α (vgl.5.2.4.b))

erhält man durch Anwendung von $\bar{\rho}$ mit $\rho \in \Sigma_k$ weitere Elemente aus B_α, und jedes Element aus B_α kann so gewonnen werden. Allerdings überlegt man sich leicht, daß durchaus verschiedene ρ das gleiche Element aus B_α liefern können. Im folgenden soll eine Teilmenge von Σ_k angegeben werden, die in eindeutiger Weise alle Elemente aus B_α aus dem obigen ausgezeichneten Element produziert, nämlich ein Linksnebenklassen-Vertretersystem von $\Sigma_{\alpha_1} \times \Sigma_{\alpha_2} \times \ldots \times \Sigma_{\alpha_k}$. Vergleiche dazu auch die Definition der reduzierten Symmetrieoperatoren in [Berg 65] (dort Rechts- statt Links-) und die Definition von TS in [Rob 63] III 5 (Vorsicht,dort ist die Linksoperation von Σ_k falsch definiert, was jedoch keine weitere Auswirkung auf den Text hat.)!

5.2.5.DEF.: Für $\alpha \in \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ sei $\underline{K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} :=$

$=\{\sigma \in \Sigma_{|\alpha|} \mid \forall l \in \mathbb{N}: \sigma(\sum_{i \in \underline{l-1}} \alpha_i + p) < \sigma(\sum_{i \in \underline{l-1}} \alpha_i + q)$ falls $0<p<q \leq \alpha_1\}$

($\sigma \in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ ist also abschnittsweise monoton.)

$\underline{K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}$, $\underline{K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)}$, $\underline{K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)}$, $\underline{K_k}$, $\underline{K_{k,s}}$

seien in naheliegender Weise ähnlich wie in 5.1.3. erklärt.

5.2.6.BEM.: $K_n(1,1,\ldots 1) = \Sigma_n$.

5.2.7.KONVENTION: Ist $(\alpha_i)_i \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, so soll $K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots):=0$ sein, falls $\alpha_i<0$ ist für eines der i.

5.2.8.SATZ: Für $\alpha\in\mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ mit $|\alpha|=k>0$ wird durch $\sigma \longmapsto \underline{\underline{U^\sigma}}=(U_1^\sigma)_1$ mit $U_1^\sigma:=\{\sigma(j)\mid \sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i<j\leq\sum_{i\in\underline{1}}\alpha_i\}$ eine Bijektion von $K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ auf $P_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ gegeben.
Die Umkehrabbildung hat folgendes Aussehen:
$(U_1)_1 \longmapsto \underline{\underline{\sigma_U}}$ mit $\sigma_U(j):= n_{1,j-(\sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i)}$ wenn $\sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i<j\leq\sum_{i\in\underline{1}}\alpha_i$ ist und $n_{11}<n_{12}<n_{13}<\ldots\leq n_{1\alpha_1}$ die Elemente von U_1 sind.

BEW.: 1) $\sigma\longmapsto(U_1^\sigma)_1\longmapsto\sigma_{U^\sigma}$: Für $\sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i<j\leq\sum_{i\in\underline{1}}\alpha_i$ gilt:
$\sigma_{U^\sigma}(j)\in U_1 = \{\sigma(r)\mid \sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i<r\leq\sum_{i\in\underline{1}}\alpha_i\} \Rightarrow \sigma_{U^\sigma}(\{\sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i+j\mid j\in\underline{\alpha_1}\})\subset \sigma(\{\sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i+r\mid r\in\underline{\alpha_1}\})$. Da beide Mengen gleichmächtig sind folgt sogar die Gleichheit. Da σ_{U^σ} und σ beide aus $K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ sind, folgt $\sigma=\sigma_{U^\sigma}$.

2) $(U_1)_1\longmapsto\sigma_U\longmapsto(U_1^{\sigma_U})_1$: Wegen $|U_1^{\sigma_U}|=|U_1|$ (*) reicht es, $U_1^{\sigma_U}$ zu betrachten mit $U_1^{\sigma_U}\neq\emptyset$.
$U_1^{\sigma_U}=\{\sigma_U(j)\mid\sum_{i\in\underline{1-1}}\alpha_i<j\leq\sum_{i\in\underline{1}}\alpha_i\}\subset U_1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} U_1^{\sigma_U}=U_1$. ■

5.2.9.KOROLLAR: Es gelten folgende Aussagen:

a) $\overline{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots) = \overline{X}_{U^\sigma} \quad \forall\sigma\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$

b) $B_\alpha = \{\overline{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots) \mid \sigma\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\}$.

BEW.: Nach 5.2.4.a) reicht es zu zeigen: $U^\sigma = \overline{\sigma}(V)$ mit

$V_l := \{j\in\underline{k} \mid \sum_{i\in\underline{l-1}}\alpha_i < j \leq \sum_{i\in\underline{l}}\alpha_i\}$. $\quad \overline{\sigma}(V)_l \underset{5.2.3.}{=} \{j\in\underline{k}\mid\sigma^{-1}(j)\in V_l\} =$

$= \{j\in\underline{k}\mid \sum_{i\in\underline{l-1}}\alpha_i < \sigma^{-1}(j) \leq \sum_{i\in\underline{l}}\alpha_i\} = \{\sigma(r)\in\underline{k}\mid \sum_{i\in\underline{l-1}}\alpha_i < r \leq \sum_{i\in\underline{l}}\alpha_i\} = U^\sigma_l.$

b) ist eine triviale Folgerung aus a) und 5.2.8.. ■

Ist $\alpha\in\mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ mit $|\alpha|=k$ und ist

$((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots) = Y_1\otimes Y_2\otimes\ldots\otimes Y_k$ mit $Y_i\in B$ für alle i,

so gilt nach Obigem für $\sigma\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$:

5.2.10. $\quad Y_{\sigma^{-1}(p)} = X^q \iff p\in U^\sigma_q$.

5.2.11.DEF.: Für $\sigma\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ bezeichne $\underline{\underline{X}}_\sigma$ das Element

$\overline{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots)$ (vgl. 5.2.9.a)).

5.2.12.

$$(X^1+X^2+\ldots+X^l)^{\otimes k} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_l=k} \sum_{\sigma\in K_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)} \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{l}}(X^i)^{\otimes\alpha_i}\Big)$$

BEW.: $(X^1+\ldots+X^l)^{\otimes k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k\in\underline{l}} X^{i_1}\otimes\ldots\otimes X^{i_k} =$

$= \sum_{U\in P_{k,l}} \overline{X}_U = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_l=k} \sum_{\sigma\in K_k((\alpha_i)_{i\in\underline{l}})} \overline{X}_\sigma$. Dabei folgt die letzte Gleichheit aus 5.2.8. und 5.2.9.. ■

$\forall k>i$ sei $\underline{\underline{B_i(k)}} := \{ \overline{X}^\beta = X^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes X^{\beta_i} \mid \beta_1+\ldots+\beta_i=k\}$.

Ist $\overline{X}_U = \overline{X}^\beta \in B_i(k)$, dann ist $k = \sum_{j\in\underline{i}} \beta_j = \sum_{j\in\underline{i}} (\sum_{l\in\mathbb{N}} \delta_{l,\beta_j} l) =$

$\overset{5.1.6.}{=} \sum_{j\in\underline{i}} \sum_{l\in\mathbb{N}} |\{j\}\cap U_l| l = \sum_{l\in\mathbb{N}} (\sum_{j\in\underline{i}} |\{j\}\cap U_l|) l = \sum_{l\in\mathbb{N}} |U_l| l.$

Also ist $B_i(k) = \{\overline{X}_U\in B_i \mid \sum_{l\in\mathbb{N}} |U_l| l = k\}$.

Ist $\overline{X}_U = \overline{X}_{U^\sigma} = \overline{\sigma}((X^1)^{\otimes|U_1|}\otimes(X^2)^{\otimes|U_2|}\otimes\ldots)$ (5.2.9.), dann gilt nach 5.2.8.:

5.2.13. $B_i(k) = \bigcup_{\{(\alpha_l)_l\in\mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})} \mid \sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_l l=k,\ \sum_{\underline{l}} \alpha_l=i\}} \{\overline{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots) \mid \overline{\sigma}\in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\}$

5.2.14.DEF.: Für alle $k\in\mathbb{N}_o$ und $s\in\mathbb{N}$ sei

$$\underline{\underline{\tilde{P}_{k,\mathbb{N}}}} := \{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})} \mid \sum_{j\in\mathbb{N}} j\alpha_j=k\} \text{ und}$$

$$\underline{\underline{\tilde{P}_{k,s}}} := \{(\alpha_j)_{j\in\underline{s}}\in\mathbb{N}_o^{s} \mid \sum_{j\in\underline{s}} \alpha_j j=k\} .$$

Weiter sei für eine beliebige Indexmenge I

$$\overline{P}_{k,I} := \{(\alpha_i)_{i\in I}\in\mathbb{N}_o^{(I)} \mid \sum_{i\in I} \alpha_i=k\} .$$

5.2.15. Für $k>i$ gilt in $T_i(R[X]^+)$:

$$\sum_{\{(\beta_j)_j\in\mathbb{N}^i \mid \beta_1+\ldots+\beta_i=k\}} \overline{X}^\beta =$$

$$= \sum_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \hat{P}_{k,\mathbb{N}} \mid \sum_j \alpha_j = i\}} \; \sum_{\sigma\in K_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bar{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots) \; .$$

(Die Aussage ist klar, da beide Summen genau über $B_i(k)$ gehen.)

Setzt man in 5.2.15. speziell $k=i+m$ ($m\in\mathbb{N}$) und wendet auf die Gleichung den Σ_i-Homomorphismus $t((X^0,X^1,X^2,\ldots))$ an (vgl.5.2.2.), so ergibt sich:

$$\sum_{(\gamma_j)_j\in\mathbb{N}_o^i \mid \gamma_1+\ldots+\gamma_i=m\}} X^{\gamma_1}\otimes\ldots\otimes X^{\gamma_i} =$$

$$= \sum_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\hat{P}_{i+m,\mathbb{N}} \mid \sum_j \alpha_j = i\}} \; \sum_{\sigma\in K_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bar{\sigma}((X^0)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^1)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots) \; .$$

$$i+m = \sum_{l\in\mathbb{N}} \alpha_l l = \sum_{l\in\mathbb{N}} (l-1)\alpha_l + i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{l\in\mathbb{N}} (l-1)\alpha_l = m \; .$$

$\sum_j \alpha_j = i \Longleftrightarrow \alpha_1 = i - \sum_{j>1} \alpha_j$. Zusammen ergibt dies:

5.2.16. Für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt in $T_i(R[X])$:

$$\sum_{(\gamma_j)_j\in\mathbb{N}_o^i \mid \gamma_1+\ldots+\gamma_i=m\}} X^{\gamma_1}\otimes\ldots\otimes X^{\gamma_i} =$$

$$= \sum_{(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\hat{P}_{m,\mathbb{N}}} \; \sum_{\sigma\in K(i-\lfloor\zeta\rfloor,(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}})} \bar{\sigma}((X^0)^{\otimes(i-\lfloor\zeta\rfloor)}\otimes(X^1)^{\otimes\zeta_1}\otimes(X^2)^{\otimes\zeta_2}\ldots)$$

5.2.17. Für $\rho\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ gilt:

$$\bar{\rho}\Big(\sum_{\sigma\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bar{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots)\Big) =$$

$$= \sum_{\zeta\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bar{\zeta}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots)$$

(Folgt aus 5.2.9.b) und 5.2.4.b))

5.2.18.BEM.: Das Element $\iota_\Gamma(X^{1\,[\alpha_1]}X^{2\,[\alpha_2]}\ldots) :=$

$\sum_{\sigma\in K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bar{\sigma}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots)$ ist also symmetrisch,

d.h. invariant gegen die Wirkung von Σ_k von links. Dies folgt auch aus der Tatsache, daß $K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ Vertretersystem der Linksnebenklassen von $\Sigma_{\alpha_1}\times\Sigma_{\alpha_2}\times\ldots$ ist und

$(X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots$ invariant ist gegen $\Sigma_{\alpha_1}\times\Sigma_{\alpha_2}\times\ldots$.

$\iota_\Gamma(X^{1\,[\alpha_1]}X^{2\,[\alpha_2]}\ldots)$ entspricht gerade dem Element

$\mathcal{S}^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}_{red}((X^1)^{\otimes\alpha_1}\otimes(X^2)^{\otimes\alpha_2}\otimes\ldots)$ in [Berg 65]1.2. .

5.3. Neben $P_k((\alpha_i)_i)$ und $K_k((\alpha_i)_i)$ kann man auch die Menge $M((1,1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)$, wobei die 1 k-mal auftritt, benutzen um B_α darzustellen.

Betrachte $M((1,1,\ldots,1);(\alpha_i)_i) =: \bar{M}$ genauer!

$(a_{pq})_{pq}\in\bar{M} \Longrightarrow a_{pq} = 0$ oder 1 . Es gibt $\binom{k}{\alpha_1}$ Möglichkeiten, in der ersten Spalte α_1 Einsen zu setzen. Es verbleiben jeweils $\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}$ Möglichkeiten, in der zweiten Spalte α_2 Einsen zu setzen, usw.. Insgesammt gibt es (mit $r:=\max\{i\,|\,\alpha_i\neq 0\}$)

$$\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{k-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\ldots\binom{k-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{r-2})}{\alpha_{r-1}} =$$

$$= \binom{\alpha_1+\ldots+\alpha_r}{\alpha_1}\binom{\alpha_2+\ldots+\alpha_r}{\alpha_2}\ldots\ldots\binom{\alpha_{r-1}+\alpha_r}{\alpha_{r-1}} =$$

$$= \frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_r)!}{\alpha_1!(\alpha_2+\ldots+\alpha_r)!}\;\frac{(\alpha_2+\ldots+\alpha_r)!}{\alpha_2!(\alpha_3+\ldots+\alpha_r)!}\;\ldots\ldots\;\frac{(\alpha_{r-1}+\alpha_r)!}{\alpha_{r-1}!\alpha_r!} =$$

$$= \frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!} = \binom{\alpha_1+\ldots+\alpha_r}{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}$$ Elemente in $\bar{M}$, genauso viele also, wie in $K_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ (klar!) .

5.3.1.SATZ: Für $\alpha \in \overline{P}_{k,\mathbb{N}}$ (5.2.14) wird durch

$(\alpha_{ij})_{ij} \longmapsto (U_l := \{i \in \underline{k} \mid \alpha_{il}=1\})_l$ eine Bijektion von

$M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)$ (k-mal 1) auf $P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$ definiert. Die Umkehrabbildung ist gerade

$(U_l)_l \longmapsto (\delta_{|U_l \cap \{i\}|,1})_{i,l}$.

Zusammen gilt also:

5.3.2. $\forall\, i \in \underline{k}, j \in \mathbb{N}$: $\alpha_{ij} = 1 \iff i \in U_j \overset{5.2.8.}{\iff}$

$i \in \sigma_U(\{\alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1}+l \mid l \in \underline{\alpha_j}\})$

BEW. von 5.3.1.: 1) Für $(\alpha_{ij})_{ij} \in M((1,\ldots,1);(\alpha_l)_l)$ gilt:

a) $|\{i \in \underline{k} \mid \alpha_{il}=1\}| = \sum_{i \in \underline{k}} \alpha_{il} = \alpha_l$

b) $\{i \in \underline{k} \mid \alpha_{il}=1\} \cap \{i \in k \mid \alpha_{im}=1\} \neq \emptyset$ für ein Paar $l \neq m$ $\Longrightarrow$

$\exists i \in \underline{k}$: $\alpha_{il}=\alpha_{im}=1 \Longrightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_{ij} \geq 2$ (Widerspruch!).

Die Abbildung geht also in $P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$.

c) $\delta_{|\{j \in \underline{k} \mid \alpha_{jl}=1\} \cap \{i\}|,1} = \delta_{\alpha_{il},1} = \alpha_{il}$

2) Für $(U_l)_l \in P_{k,\mathbb{N}}((\alpha_i)_i)$ gilt:

a) $\sum_{i \in \underline{k}} \delta_{|U_l \cap \{i\}|,1} = |U_l| = \alpha_l \quad \forall l$

b) $\sum_{l \in \mathbb{N}} \delta_{|U_l \cap \{i\}|,1} = 1 \quad \forall i \in \underline{k}$, da $\underline{k} = \dot{\bigcup}_l U_l$

Die Umkehrabbildung geht also in $M((1,..,1);(\alpha_l)_l)$.

c) $\{i \in \underline{k} \mid \delta_{|U_l \cap \{i\}|,1} = 1 = U_l$

Aus 1c) und 2c) folgt, daß beide Abbildungen invers zueinander sind. 5.3.2. folgt trivialerweise aus den Abbildungsvorschriften. ■

5.3.3.BEM.: 5.3.2. zeigt, daß die Elemente von $M((1,..,1);(\alpha))$ Inzidenzmatrizen sind, wie sie in [Rys 63]5.4 in allgemeinerer Form betrachtet werden.

Für das Folgende sei $\alpha \in \overline{P}_{k,\mathbb{N}}$ und $(\alpha_{ij})_{ij} \in M((1,\ldots,1);(\alpha_1)_1)$.

5.3.4. $\alpha_{ij} = 1 \iff \sum_{p\in\mathbb{N}} p\alpha_{ip} = j$, woraus folgt:

5.3.5. $$\bigotimes_{i\in\underline{k}} \Big(\bigotimes_{j\in\mathbb{N}} (X^j)^{\otimes\alpha_{ij}} \Big) = \bigotimes_{i\in\underline{k}} X^{(\sum_p p\alpha_{ip})} .$$

Ist $U = (U_l)_l$ die nach 5.3.1. zu (α_{ij}) gehörige Partition und σ_U die dazu nach 5.2.8. gehörige Permutation aus $K_k((\alpha_i)_i)$, so gilt:

5.3.6. $$\bigotimes_{i\in\underline{k}} \Big(\bigotimes_{j\in\mathbb{N}} (X^j)^{\otimes\alpha_{ij}} \Big) = \overline{\sigma_U}\Big(\bigotimes_{j\in\mathbb{N}} (X^j)^{\otimes\alpha_j} \Big) ,$$

denn $X^{(\sum_p p\alpha_{ip})} = X^j \underset{5.3.2.+5.3.4.}{\iff} i\in U_j \underset{5.2.10.}{\iff} Y_{\sigma_U^{-1}(i)} = X^j$

und $\bigotimes_{i\in\underline{k}} Y_{\sigma_U^{-1}(i)} = \overline{\sigma}_U\Big(\bigotimes_{j\in\mathbb{N}} (X^j)^{\otimes\alpha_j} \Big)$.

Wähle nun speziell $(\alpha_{ij})_{ij} \in M((\underbrace{1,\ldots,1}_{k});(\underbrace{1,..,1}_{k}))$, d.h. $(\alpha_{ij})_{i,j\in\underline{k}}$ als "Permutationsmatrix". Aus 5.3.6.folgt dann:

$$\bigotimes_{i\in\underline{k}} \Big(\bigotimes_{j\in\underline{k}} (X^j)^{\otimes\alpha_{ij}} \Big) = X^{\sigma_U^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes X^{\sigma_U^{-1}(k)} .$$

Wegen $\sigma_U \in K_k(1,\ldots 1) = \Sigma_k$ ergibt sich aus 5.2.10. :

5.3.7. $\alpha_{ij} = 1 \iff i = \sigma_U(j)$.

Ist e_p die Spalte $(\delta_{ip})_{i\in\underline{k}}$, so gilt: $(\alpha_{ij})_{i,j}\cdot e_p = e_q \iff \alpha_{pq} = 1 \overset{5.3.7.}{\iff}$

5.3.8. $(\alpha_{ij})_{i,j}\cdot e_p = e_{\sigma_U(p)}$.

5.4. Für jede R-Algebra A trägt $T_k(A)=A\otimes A\otimes\ldots\otimes A$ ($\mathbb{N}\ni k$-mal) die Struktur einer R-Algebra, die Tensorproduktstruktur. Zur Unterscheidung von der mit "$\otimes$" oder auch "$\cdot$" bezeichneten Multiplikation in der Tensoralgebra soll für diese (unabhängig von k) "τ" geschrieben werden. Dies gilt insbesondere auch für $A=R[X]$. $T_k(R[X]^+)\subset T_k(R[X])$ ist multiplikativ abgeschlossen.
Was ergibt sich nun mit $\rho,\sigma\in K_{k,\mathbb{N}}$ für $\overline{X}_\rho\tau\overline{X}_\sigma$ in $T_k(R[X]^+)$?
Dazu zunächst ein Lemma, dessen Beweis trivial ist:

5.4.1.LEMMA: Sind I und J zwei beliebige Indexmengen, $\alpha=(\alpha_i)_i\in\mathbb{N}_o^{(I)}$, $\beta=(\beta_j)_j\in\mathbb{N}_o^{(J)}$ mit $|\alpha|=|\beta|=k$, dann ist die Abbildung $g(\alpha,\beta)\colon P_{k,I}((\alpha_i)_i)\times P_{k,J}((\beta_j)_j) \longrightarrow \dot{\bigcup}_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} P_{k,I\times J}((\gamma_{ij})_{(i,j)})$, die ein Paar $(U,V)\in P_{k,I}((\alpha_i)_i)\times P_{k,J}((\beta_j)_j)$ abbildet auf $W:=(U_i\cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}$ bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(\alpha,\beta)^{-1}((W_{ij})_{(i,j)}) := ((\bigcup_{p\in J} W_{ip})_i, (\bigcup_{q\in I} W_{qj})_j) \quad . \ \blacksquare$$

5.4.2.BEM.: $g(\alpha,\beta)(U,V)\in P_{k,I\times J}((\gamma_{ij})_{(i,j)}) \iff |U_i\cap V_j|=\gamma_{ij} \quad \forall i,j$.

5.4.3.KOR.: Sind $\rho\in K_k(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, $\sigma\in K_k(\beta_1,\dots,\beta_s)$ und $\nu\in K_k((\gamma_{ij})_{(i,j)\in \underline{r}\times\underline{s}})$ die nach 5.2.8. zu $g(\alpha,\beta)(U^\rho,V^\sigma)$ gehörige Permutation, dann gilt in $T_k(R[X]^+)$:

$$\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}}(X^{is})^{\otimes\alpha_i}\Big)\ \tau\ \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}}(X^{j})^{\otimes\beta_j}\Big)=\overline{\nu}\Big(\bigotimes_{i,j}(X^{is+j})^{\otimes\gamma_{ij}}\Big)\ .$$

BEW.: $\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}}(X^{is})^{\otimes\alpha_i}\Big)=X^{p_1}\otimes\dots\otimes X^{p_k}$ mit $p_1=is \Longleftrightarrow l\in U_i^\rho$.

$\overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}}(X^{j})^{\otimes\beta_j}\Big)=X^{q_1}\otimes\dots\otimes X^{q_k}$ mit $q_1=j \Longleftrightarrow l\in V_j^\sigma$. Damit ist

$$\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}}(X^{is})^{\otimes\alpha_i}\Big)\ \tau\ \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}}(X^{j})^{\otimes\beta_j}\Big)=X^{p_1+q_1}\otimes\dots\otimes X^{p_k+q_k}\ \text{mit}$$

$p_1+q_1=is+j \Longleftrightarrow l\in U_i\cap V_j$. Die Behauptung folgt mit 5.4.1. aus der Def. von ν. ■

5.4.4.KOR.: Sind ρ, σ, ν wie in 5.4.3., dann gilt für alle R-Algebren A und für alle a_i, b_j ($i\in\underline{r}$, $j\in\underline{s}$) aus A :

$$\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}}a_i^{\otimes\alpha_i}\Big)\ \tau\ \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}}b_j^{\otimes\beta_j}\Big)=\overline{\nu}\Big(\bigotimes_{(i,j)\in\underline{r}\times\underline{s}}(a_ib_j)^{\otimes\gamma_{ij}}\Big)\ \text{in}\ T_k(A).$$

BEW.: Spezialisiere in 5.4.3. (mit $a_0=b_0=1_A$)
$X^{is+j}\longmapsto a_ib_j$ $\forall(i,j)\in\underline{r}_o\times\underline{s}_o-0$. Es bleibt z.z. (t wie in 5.1.1.):

$$t((a_ib_j)_{(i,j)})\Big(\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}}(X^{is})^{\otimes\alpha_i}\Big)\ \tau\ \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}}(X^{j})^{\otimes\beta_j}\Big)\Big)=$$

$$=\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}}a_i^{\otimes\alpha_i}\Big)\ \tau\ \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}}{}^{\otimes\beta_j}\Big)\ .$$ Dies ist aber unmittelbar klar, da $X^{is}\cdot X^{j}\longmapsto a_ib_j$, ebenso wie $X^{is+j}\longmapsto a_ib_j$. ■

5.4.5.KOR.: ρ, σ, ν seien wie in 5.4.3.. Für R-Moduln M,N und Elemente $m_i \in M$, $n_j \in N$ ($i \in \underline{r}$, $j \in \underline{s}$) seien

$$(z_1,\ldots,z_k) := (\underbrace{m_1,\ldots,m_1}_{\alpha_1},\underbrace{m_2,\ldots,m_2}_{\alpha_2},m_3,\ldots) \quad \text{und}$$

$$(y_1,\ldots,y_k) := (\underbrace{n_1,\ldots,n_1}_{\beta_1},\underbrace{n_2,\ldots,n_2}_{\beta_2},n_3,\ldots) \quad , \text{ dann gilt in } T_k(M\otimes N):$$

a) $(z_{\rho^{-1}(1)} \otimes y_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \ldots\ldots \otimes (z_{\rho^{-1}(k)} \otimes y_{\sigma^{-1}(k)}) =$

$$= \overline{\nu}\Big(\bigotimes_{i,j} (m_i \otimes n_j)^{\otimes \gamma_{ij}}\Big) .$$

b) $$\sum_{\substack{\zeta \in K_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \\ \eta \in K_k(\beta_1,\ldots,\beta_s)}} (z_{\zeta^{-1}(1)} \otimes y_{\eta^{-1}(1)}) \otimes \ldots \otimes (z_{\zeta^{-1}(k)} \otimes y_{\eta^{-1}(k)}) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij}) \in M((\alpha_i)_{i\in\underline{r}};(\beta_j)_{j\in\underline{s}})} \sum_{\psi \in K_k((\gamma_{ij}))} \overline{\psi}\Big(\bigotimes_{i,j} (m_i \otimes n_j)^{\otimes \gamma_{ij}}\Big) .$$

BEW.: Setze in 5.4.4. $A := T(M)\otimes T(N)$, $a_i := m_i \otimes 1$, $b_j := 1 \otimes n_j$.

Dann gilt: $\overline{\rho}\Big(\bigotimes_{i\in\underline{r}} a_i^{\otimes \alpha_i}\Big) \tau\, \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_{j\in\underline{s}} b_j^{\otimes \beta_j}\Big) =$

$$= ((z_{\rho^{-1}(1)} \otimes 1) \otimes \ldots \otimes (z_{\rho^{-1}(k)} \otimes 1)) \tau ((1 \otimes y_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \ldots \otimes (1 \otimes y_{\sigma^{-1}(k)}) =$$

$$= (z_{\rho^{-1}(1)} \otimes y_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \ldots \otimes (z_{\rho^{-1}(k)} \otimes y_{\sigma^{-1}(k)}) .$$

Da $M\otimes N$ direkter Summand von $T(M)\otimes T(N)$ ist, folgt wegen $a_i b_j = m_i \otimes n_j$ die Aussage a). b) folgt mit a) aus 5.4.1.. ■

KAPITEL 6 : Γ und der Tensorfunktor; Zusammenhänge.

6.1. Nach [Rob 63]Prop.III 1 existiert ein kanonischer graduierter R-Modulhomomorphismus $\iota_\Gamma:\Gamma(M)\longrightarrow T(M)$ vom Grad 0. Für $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$ gilt: $\iota_\Gamma(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}) = \sum_{\sigma\in K_{[\alpha]}((\alpha_i)_i)} \bar{\sigma}(\otimes_i m_i^{\otimes\alpha_i})$.

Das Bild von ι_Γ liegt also in den "symmetrischen Tensoren" (vgl. 5.2.18.). Diese tragen eine R-Algebra-Struktur ([Rob 63]III 5), so daß ι_Γ R-Algebra-Hom. wird. Tatsächlich läßt sich diese R-Algebra-Struktur auf ganz T(M) fortsetzen und stimmt dort mit der "Shuffle-Struktur" überein (vgl. [Swe 69] XII).

Diese Struktur auf T(M) sei hier durch die Bezeichnung $\underline{\underline{TS(M)}}$ gekennzeichnet. (Bedeutung weicht ab von der in [Rob 63]!) Sie ist wie folgt definiert:

6.1.1.DEF.: $\mu_{\underline{\underline{TS}}}((m_1\otimes\ldots\otimes m_i)\otimes(m_{i+1}\otimes\ldots\otimes m_n)) :=$

$$= \sum_{\sigma\in K(i,n-i)} m_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes m_{\sigma^{-1}(n)} \qquad \forall m_i\in M,\ n\in\mathbb{N}.$$

$\eta_{\underline{\underline{TS}}} := id_{T_0(M)}$ $\quad (T_0(M)\cong R!)$.

6.1.2.BEM.: a) Die Algebra TS(M) ist ersichtlich kommutativ.

b) $\iota_\Gamma:\Gamma(M)\longrightarrow TS(M)$ ist der eindeutig bestimmte R-Algebra-Hom. mit $\iota_\Gamma(m^{[i]}) = m^{\otimes i}$ $\forall m\in M,\ i\in\mathbb{N}_0$.

c) Aus $T(f)\circ\iota_{\Gamma(M)}(m^{[i]}) = \iota_{\Gamma(N)}\circ\Gamma(f)(m^{[i]}) = f(m)^{[i]}$ für $f:M\longrightarrow N$, $m\in M$, $i\in\mathbb{N}_0$ folgt jetzt sofort, daß ι_Γ natürliche Transformation ist, da alle Abbildungen R-Algebra-Hom. sind.

6.1.3.LEMMA: Für alle R-Moduln M stimmt $\iota_\Gamma(\Gamma_k(M))$ mit dem in [Berg 65]2.2.(21) definierten R-Modul $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(M,k)$ überein.

BEW.: klar nach Def. von ι_Γ und $\mathfrak{S}$. ■

Nach [Rob 63] ist ι_Γ injektiv, wenn M frei ist (Prop IV 5) oder R einen Körper der Charakteristik O enthält(III 6 Cor.). In beiden Fällen gilt sogar, daß $\iota_\Gamma(\Gamma_k(M))$ die Menge der symmetrischen Tensoren in $T_k(M)$ ist (vgl. auch [Berg 65] S. 135/136).
Da beide Funktoren Γ_i und "symmetr. Tensoren in T_i" mit direkten Limites vertauschen ([Rob 63]ThIV 3),[Ive 70]I.1), und jeder flache Modul Limes von endlich-erzeugt freien Moduln ist ([Laz 69]Th.1.2., vgl. [Ive 70]), ist $\iota_{\Gamma(M)}$ sogar für jeden flachen Modul M ein Isomorphismus (auf das Bild). Also gilt über einem von Neumann regulären Ring R für jeden Modul M, daß $\iota_{\Gamma(M)}$ Isomorphismus von $\Gamma(M)$ auf die symmetrischen Tensoren in T(M) ist.

6.1.4.BEM.: Ist R Körper und ι_Γ damit stets injektiv, so ist Im $\iota_{\Gamma(M)}$ maximale cocommutative Subbigebra von TS(M) und isomorph zur universellen punktierten irreduziblen Bigebra B(M) (vgl. [Swe 69]12.2).

6.1.5. Ist S eine kommutative R-Algebra, M ein R-Modul, so kommutiert folgendes Diagramm in S-ALG:

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^S(M\otimes S) & \xrightarrow{\iota_\Gamma} & TS^S(M\otimes S) \\ \downarrow{\scriptstyle (\nu^{RS})^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan.}} \\ \Gamma^R(M)\otimes S & \xrightarrow{\iota_\Gamma\otimes id_S} & TS^R(M)\otimes S \end{array}$$

(Die Abbildung in der rechten Spalte ist dabei die Einschränkung des kan. Isomorphismus von $T^S(M\otimes S)$ auf $T^R(M)\otimes S$ [Bou 74] III§5.3 Prop.5)

BEW.: kan. $\iota_\Gamma((m\otimes 1_S)^{[k]}) = \text{kan.}((m\otimes 1_S)^{\otimes k}) = m^{\otimes k}\otimes 1_S$,
$\iota_\Gamma\otimes id_S$ kan. $((m\otimes 1_S)^{[k]}) = \iota_\Gamma(m^{[k]})\otimes 1_S$. ■

Für R-Moduln M,N und für $k\in\mathbb{N}_0$ bezeichne

μ^T_{MN}: $T_k(M)\otimes T_k(N) \longrightarrow T_k(M\otimes N)$ den kan. Isomorphismus

mit $(m_1\otimes\ldots m_k)\otimes(n_1\otimes\ldots\otimes n_k) \longrightarrow (m_1\otimes n_1)\otimes\ldots\otimes(m_k\otimes n_k)$.

6.1.6. Das folgende Diagramm kommutiert in R-MOD:

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} T_k(M)\otimes T_k(N) & \xrightarrow{\mu^T_{MN}} & T_k(M\otimes N) \\ \uparrow{\scriptstyle \iota_\Gamma\otimes\iota_\Gamma} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_\Gamma} \\ \Gamma_k(M)\otimes\Gamma_k(N) & \xrightarrow[\text{(vgl.2.4.1.)}]{\mu_{MN}} & \Gamma_k(M\otimes N) \end{array}$$

BEW.: Für $\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\in\Gamma_k(M)$, $\prod_j n_j^{[\beta_j]}\in\Gamma_k(N)$ ist zu zeigen:

$$\sum_{\substack{\sigma\in K_k((\alpha_i)_i) \\ \rho\in K_k((\beta_j)_j)}} (x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes y_{\rho^{-1}(1)})\otimes\ldots\otimes(x_{\sigma^{-1}(k)}\otimes y_{\rho^{-1}(k)}) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \sum_{\nu\in K_k((\gamma_{ij})_{i,j})} \bar{\nu}\Big(\bigotimes_{i,j}(m_i\otimes n_j)^{\otimes\gamma_{ij}}\Big) ,$$

wobei $(x_1,\ldots,x_k) := (m_1,\ldots,m_1,m_2,\ldots,m_2,m_3,\ldots)$ (α_i-mal m_i)

und $(y_1,\ldots,y_k) := (n_1,\ldots,n_1,n_2,\ldots,n_2,n_3,\ldots)$ (β_j-mal n_j).
Dies ist aber gerade die Aussage von 5.4.5.b). ■

6.1.7. Für einen R-Modul-Hom. $f: M \otimes N \longrightarrow L$ kommutiert

$$(D_3) \qquad \begin{array}{ccccc} T_k(M)\otimes T_k(N) & \xrightarrow[\mu^T_{MN}]{} & T_k(M\otimes N) & \xrightarrow[T_k(f)]{} & T_k(L) \\ \uparrow{\scriptstyle \iota_\Gamma \times \iota_\Gamma} & & & & \uparrow{\scriptstyle \iota_\Gamma} \\ \Gamma_k(M)\otimes\Gamma_k(N) & \xrightarrow{\mu_{MN}} & \Gamma_k(M\otimes N) & \xrightarrow[\Gamma_k(f)]{} & \Gamma_k(L) \end{array} .$$

(Folgt aus (D_2), da ι_Γ nat. Transf. ist)

Gegeben sei eine R-Algebra (A,μ_A,η_A). Durch

$\mu_{T_k(A)} := T_k(\mu_A)\circ\mu^T_{AA} : T_k(A)\otimes T_k(A) \longrightarrow T_k(A)$ und

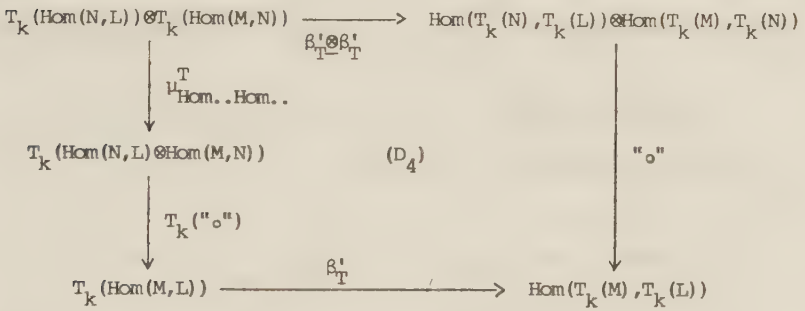
$\eta_{T_k(A)} := T_k(\eta_A) : R \cong T_k(R) \longrightarrow T_k(A)$ wird dann auf $T_k(A)$ eine R-Algebra-Struktur definiert. Dies ist die übliche Struktur auf dem Tensorprodukt von Algebren.
Aus (D_3) folgt jetzt sofort :

6.1.8.LEMMA: $\iota_\Gamma: \Gamma_k(A) \longrightarrow T_k(A)$ ist für alle $k\in\mathbb{N}_0$ ein R-Algebra-Homomorphismus.

6.1.9.BEM.: Die in [Berg 65] verwendete Algebra-Struktur auf $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(A,k)$ ist Unterstruktur von $T_k(A)$, und $\iota_\Gamma: \Gamma_k(A) \longrightarrow \mathfrak{S}$ ist somit R-Algebra-Epimorphismus.

6.2. Ist weiter $\beta'_T : T_k(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N))$ (Schreibe gelegentlich genauer β'_{T_k} !) der kanonische R-Mo-

dul-Hom. ([Bou 74] II§3.5), so überzeugt man sich leicht von der Kommutativität des Diagramms (D_4) :



("$\circ$" bezeichnet die Hintereinanderausführung von Homomorphismen)

Aus (D_4) folgt sofort:

6.2.1. $\beta'_T : T_k(\mathrm{End}M) \longrightarrow \mathrm{End}(T_k(M))$ ist R-Algebra-Hom..

$T_k(M)$ trägt also eine Links-$T_k(\mathrm{End}M)$-Algebra-Modul-Struktur. Der zu β'_T adjungierte Hom. aus $\mathrm{Hom}(T_k(\mathrm{End}M)\otimes T_k(M), T_k(M))$ hat die Form $T_k(\mathrm{End}M)\otimes T_k(M) \xrightarrow[\mu^T_{\mathrm{End}M\ M}]{} T_k(\mathrm{End}M\otimes M) \xrightarrow[T_k(A^M_M)]{2.3.3} T_k(M)$.

6.2.2.DEF.: Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $\beta_{T,k}$ die Komposition

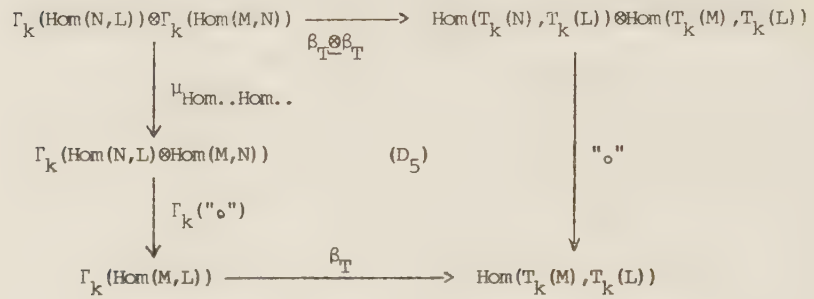
$\beta_{T,k}: \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N)) \xrightarrow[\iota_\Gamma]{} T_k(\mathrm{Hom}(M,N)) \xrightarrow[\beta'_T]{} \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N))$.

$\beta_T: \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N))$ sei definiert als

$\beta_T := (\beta_{T,k})\big|_{\Gamma(\mathrm{Hom}(M,N))}$. ($\prod_k \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N))\ \mathrm{Hom}(T(M),T(N))$)

Häufig wird auch β_T an Stelle des genaueren $\beta_{T,k}$ geschrieben werden.

6.2.3. Aus der Kombination von (D_3) und (D_4) folgt sofort die Kommutativität des Diagramms (D_5):



6.2.4.DEF.: Für eine Indexmenge I und Elemente $(\alpha_i)_{i\in I}\in\mathbb{N}_o^{(I)}$, $f_i\in\mathrm{Hom}(M,N)$ $(\forall i\in I)$ sowie $\sigma\in K_k((\alpha_i)_i)$ sei

$$\bar{\sigma}\left(\bigotimes_{i\in I} f_i^{\otimes\alpha_i}\right) := \beta_T'\left(\bar{\sigma}\left(\bigotimes_i f_i^{\otimes\alpha_i}\right)\right).$$

Mit dieser Definition läßt sich (D_5) auch so schreiben:

6.2.5.
$$\sum_{\substack{\sigma\in K((\alpha_i)_i)\\ \rho\in K((\beta_j)_j)}} \bar{\sigma}\left(\bigotimes_{i\in I} f_i^{\otimes\alpha_i}\right)\circ\bar{\rho}\left(\bigotimes_{j\in J} g_j^{\otimes\beta_j}\right) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} \sum_{\nu\in K_k((\gamma_{ij})_{(i,j)})} \bar{\nu}\left(\bigotimes_{(i,j)} (f_i\circ g_j)^{\otimes\gamma_{ij}}\right)$$

$(\forall \alpha_i, \beta_j\in\mathbb{N}_o$ mit $\sum_{i\in I}\alpha_i = k = \sum_{j\in J}\beta_j$; $f_i\in\mathrm{Hom}(N,L)$, $g_j\in\mathrm{Hom}(M,N))$

Aus (D_5) folgt weiter für M=N:

6.2.6.LEMMA: $\beta_{T,k}$: $\Gamma_k(\mathrm{End}M)\longrightarrow \mathrm{End}T_k(M)$ ist ein R-Algebra-Hom.; $T_k(M)$ trägt also eine Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Algebra-Modul-Strukt.

Da Hom(M,N) Links-EndN-Rechts-EndM-Bimodul ist, und nach Obigem $\mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N))$ Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}N)$-Rechts-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Bimodul ist, kann man folgendes Lemma formulieren, das sofort aus (D_5) folgt:

6.2.7.LEMMA: $\beta_{T,k}:\Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N))$ ist Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}N)$-Rechts-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Bimodul-Homomorphismus. ■

6.2.8.LEMMA: $\beta_{T,k}(\Gamma_k(\mathrm{End}M)) \subset \mathrm{End}_{R\Sigma_k}T_k(M)$. Ist M freier endlich-dimensionaler R-Modul, so gilt sogar die Gleichheit.

BEW.: Nach Früherem reicht es für $F\in T_k(\mathrm{End}M)$ zu zeigen: $\beta'_T(F)\in \mathrm{End}_{R\Sigma_k}T_k(M) \iff F\in \mathrm{Sym}_k(\mathrm{End}M) :=$ symmetr. Tensoren in T_k. Dies rechnet man leicht nach. Die erste Aussage folgt dann sofort. Die zweite Aussage ergibt sich, da in diesem Fall β'_T ein Isomorphismus ist ([Bou 74]II§4.4). ■

Der Zusammenhang zwischen β_Γ und β_T ist leicht hergestellt. Es kommutiert nämlich folgendes Diagramm:

$$(D_6)\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\beta_T} & \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle (\iota_\Gamma)^*} \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_k(M),\Gamma_k(N)) & \xrightarrow{(\iota_\Gamma)^*} & \mathrm{Hom}(\Gamma_k(M),T_k(N)) \end{array}$$

BEW.: Für $\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N))$ und $\prod_{j\in J} m_j^{[\beta_j]} \in \Gamma_k(M)$ gilt:

$$x := (\iota_\Gamma)^* \circ \beta_T\Big(\prod_i f_i^{[\alpha_i]}\Big)\Big(\prod_j m_j^{[\beta_j]}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma\in K_{k,I}((\alpha_i)_i) \\ \rho\in K_{k,J}((\beta_j)_j)}} \bar{\sigma}(\bigotimes_i f_i^{\otimes\alpha_i})(\bar{\rho}(\bigotimes_j m_j^{\otimes\beta_j})) \ .$$

Mit $(g_1,\ldots,g_2) := (f_1,\ldots,f_1,f_2,\ldots,f_2,f_3\ldots)$ (α_i-mal f_i)
und $(n_1,\ldots,n_k) := (m_1,\ldots,m_1,m_2,\ldots,m_2,m_3,\ldots)$ (β_j-mal m_j)
ergibt sich: $x = \sum_{\sigma,\rho} g_{\sigma^{-1}(1)}^{(n_{\rho^{-1}(1)})} \otimes \ldots \otimes g_{\sigma^{-1}(k)}^{(n_{\rho^{-1}(k)})} =$

$$= (A_N^M)^{\otimes k}\,(\sum_{\sigma,\rho}(g_{\sigma^{-1}(1)}^{\otimes n_{\rho^{-1}(1)}})\otimes\ldots\otimes(g_{\sigma^{-1}(k)}^{\otimes n_{\rho^{-1}(k)}})) =$$

$$\underset{5.4.5.b)}{=} (A_N^M)^{\otimes k}\,(\sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \sum_{\nu\in K_k((\gamma_{ij}))} \bar{\nu}(\bigotimes_{i,j}(f_i\otimes m_j)^{\otimes\gamma_{ij}})) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i);(\beta_j))} \sum_{\nu\in K_k((\gamma_{ij}))} \bar{\nu}(\bigotimes_{i,j} f_i(m_j)^{\otimes\gamma_{ij}}) =$$

$$= \iota_\Gamma(\sum_{(\gamma_{ij})} \prod_{i,j} f_i(m_j)^{[\gamma_{ij}]}). \text{ Die Behauptung folgt mit 2.2.9..} \ \blacksquare$$

KAPITEL 7 : Γ und die "Symmetrische Algebra"; Dualität und weitere Zusammenhänge.

Es ist wohlbekannt, daß für endlich-erzeugt projektives M das "graduierte Dual" von $\Gamma(M,$ gerade $S(M^*)$ ist (vgl. etwa [Bert/Ogus 78] App.A Prop A10) und umgekehrt $\Gamma(M^*)$ das graduierte Dual von $S(M)$. Letzteres gilt u.a.deswegen, weil ein kanonischer Hom. $\theta_S : \Gamma(M^*) \longrightarrow S(M)^*$ existiert, dessen homogene Komponenten $\Gamma_k(M^*) \longrightarrow S_k(M)^*$ für endlich-erzeugt projektives M Isomorphismen sind. Es wird sich herausstellen, daß θ_S ein Spezialfall des kanonischen Hom. β_S ist,

einem Analogon zu β_Γ und β_T , und sich so in eine Systematik einordnet, die in Kap. 17 für den Funktor Λ fortgesetzt wird.

7.1. Zunächst soll β_S definiert werden. Dazu ist zu beachten, daß S(M) eine kommutative, cokommutative R-Bigebra ist (vgl. [Bou 74]III§14.4 Ex.(2)). Hom(S(M),S(N)) trägt also die Struktur einer kommutativen R-Algebra mit der Convolution als Multiplikation. Einselement ist $\eta_{S(N)} \circ \varepsilon_{S(M)}$.
Wie im Fall von Γ sind wieder $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(S_i(M),S_i(N))$ und $\prod_{i\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(S_i(M),S_i(N))$ Subalgebren.

7.1.1.HILFSSATZ: Durch $f \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}_0} S_i(f)T^i$ $(\forall f\in \mathrm{Hom}(M,N))$ wird ein R-Modul-Hom. von Hom(M,N) in $\varepsilon(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(S_i(M),S_i(N))$ definiert.

BEW.: Für $r\in R$, $m_1 \vee m_2 \ldots \vee m_k \in S_k(M)$, i+j=k und $g,f\in \mathrm{Hom}(M,N)$ gilt:

a) $S_i(f)S_j(f)(m_1\vee\ldots\vee m_k)$ = (vgl. [Bou 74]III§11.1(6))

$= \sum_{\sigma\in K(i,j)} f(m_{\sigma(1)})\vee\ldots\vee f(m_{\sigma(i)})\vee f(m_{\sigma(i+1)})\vee\ldots\vee f(m_{\sigma(k)}) =$

$= |K(i,j)|\, S_k(f)(m_1\vee\ldots\vee m_k) = [i,j]S_k(f)(m_1 \,..\, m_k)$
S(N) kommut.

b) $S_0(f) = id_R = \eta_{S(N)}\circ\varepsilon_{S(M)}$.

c) $S_k(rf)(m_1\vee\ldots\vee m_k) = rf(m_1)\vee\ldots\vee rf(m_k) = r^k f(m_1)\vee\ldots\vee f(m_k) =$
$= r^k S_k(f)(m_1\vee\ldots\vee m_k)$.

d) $S_k(g+f)(m_1\vee\ldots\vee m_k) = k\mathrm{an}_S((g+f)^{\underline{\otimes} k}(m_1\vee\ldots\vee m_k)) \overset{5.1.12.}{=}$

$= \sum_{i+j=k} \sum_{\sigma\in K_k(i,j)} k\mathrm{an}_S(\bar{\sigma}(f^{\underline{\otimes} i}\underline{\otimes} g^{\underline{\otimes} j})(m_1\vee\ldots\vee m_k)) =$

$$= \sum_{i+j=k} \sum_{\sigma \in K_k(i,j)} S_i(f)(m_{\sigma(1)} \vee \ldots \vee m_{\sigma(i)}) \vee S_j(f)(m_{\sigma(i+1)} \vee \ldots \vee m_{\sigma(k)}) =$$

$$= \sum_{i+j=k} S_i(f) * S_j(f)\ (m_1 \vee \ldots \vee m_k) \quad \blacksquare$$

7.1.2.DEF.: Nach der universellen Eigenschaft von Γ existiert ein eindeutig bestimmter R-Algebra-Homomorphismus

$$\underline{\underline{\beta_S}} : \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow (\bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(S_i(M), S_i(N)), *) \quad \text{mit}$$

$$f^{[i]} \longmapsto S_i(f) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0,\ f \in \mathrm{Hom}(M,N) \quad . \bullet$$

β_S ist offensichtlich graduiert vom Grad 0 und kann nach 1.3.2. fortgesetzt werden zu einem R-Algebra-Hom. von $\prod_i \Gamma_i(\mathrm{Hom}(M,N))$ nach $\prod_i \mathrm{Hom}(S_i(M), S_i(N))$ der wieder mit β_S bezeichnet sei. $\underline{\underline{\beta_{Si}}}$ sei die i-te homogene Komponente.

7.1.3. β_S ist natürliche Transformation, d.h.: Die folgenden Diagramme kommutieren für alle $f \in \mathrm{Hom}(M',M)$ und $g \in \mathrm{Hom}(N,N')$.

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\Gamma(f^*)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(M',N)) \\ \downarrow \beta_S & & \downarrow \beta_S \\ \oplus_i \mathrm{Hom}(S_i(M), S_i(N)) & \xrightarrow{S(f^*)} & \oplus_i \mathrm{Hom}(S_i(M'), S_i(N)) \end{array}$$

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\Gamma(g_*)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N')) \\ \downarrow \beta_S & & \downarrow \beta_S \\ \oplus_i \mathrm{Hom}(S_i(M), S_i(N)) & \xrightarrow{S(g_*)} & \oplus_i \mathrm{Hom}(S_i(M), S_i(N')) \end{array}$$

BEW.: (nur für (D_1); (D_2) analog) Für alle $h \in \mathrm{Hom}(M,N)$, $i \in \mathbb{N}_0$

gilt: $h^{[i]} \xmapsto[\Gamma(f^*)]{} (h\circ f)^{[i]} \xmapsto[\beta_S]{} S_i(h\circ f)$,

$h^{[i]} \xmapsto[\beta_S]{} S_i(h) \xmapsto[S(f)^*]{} S_i(h)\circ S_i(f) = S_i(h\circ f)$. ■

Ähnlich wie für Γ (6.2.(D_6)) findet man hier einen Zusammenhang zwischen β_S und β_T. Für $n\in\mathbb{N}_0$ kommutiert nämlich das folgende Diagramm:

(D_3)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\ \beta_T\ } & \mathrm{Hom}(T_n(M),T_n(N)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_S} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{kan}_S)^*} \\ \mathrm{Hom}(S_n(M),S_n(N)) & \xrightarrow{\ (\mathrm{kan}_S)^*\ } & \mathrm{Hom}(T_n(M),S_n(N)) \end{array}$$

<u>BEW.:</u> $(\mathrm{kan}_S)_*\circ\beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1\otimes.,.\otimes m_n) =$

$$= \mathrm{kan}_S\Big(\sum_{\sigma\in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bar{\sigma}\big(\bigotimes_i f_i^{\otimes\alpha_i}\big)\Big)(m_1\otimes\ldots\otimes m_n) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} g_{\sigma^{-1}(1)}(m_1)\vee\ldots\vee g_{\sigma^{-1}(n)}(m_n) \text{ , wobei}$$

$\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_n(\mathrm{Hom}(M,N))$ ist, $m_1\otimes\ldots\otimes m_n\in T_n(M)$ und

$(g_1,\ldots,g_n) := (f_1,\ldots,f_1,f_2,\ldots,f_2,f_3,\ldots)$ (α_i-mal f_i).

$$\mathrm{kan}_S{}^*\circ\beta_S\Big(\prod_i f_i^{[\alpha_i]}\Big)(m_1\otimes\ldots\otimes m_n) = \Big(\prod_i S_{\alpha_i}(f_i)\Big)(m_1\vee\ldots\vee m_n) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bigvee_i \big(S_{\alpha_i}(f_i)(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}\vee\ldots\vee m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)})\big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)} \bigvee_i \big(f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)})\vee\ldots\vee f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)})\big) =$$

$$= \sum_{\sigma \in K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} g_1(m_{\sigma(1)}) \vee \ldots \vee g_n(m_{\sigma(n)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} g_{\sigma^{-1}(1)}(m_1) \vee \ldots \vee g_{\sigma^{-1}(n)}(m_n). \quad \blacksquare$$

7.1.4.BEM.: Jedes Element $(kan_S)_* \circ \beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})$ in $Hom(T_n(M), S_n(N))$ faktorisiert also über $S_n(M)$, ist also symmetrisch. Man kann dies unter Verwendung von 5.2.3. und 5.2.8. auch direkt nachrechnen.

7.1.5.LEMMA: Für R-Moduln M und N und $k \in \mathbb{N}_0$ kommutiert (D_4). (vgl. auch 6.2.3.(D_5))

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_k(Hom(N,L)) \otimes \Gamma_k(Hom(M,N)) & \xrightarrow{\beta_S \otimes \beta_S} & Hom(S_k(N), S_k(L)) \otimes Hom(S_k(M), S_k(N)) \\
\downarrow \mu_{Hom..Hom..} & & \\
\Gamma_k(Hom(N,L) \otimes Hom(M,N)) & (D_4) & \downarrow \text{"}\circ\text{"} \\
\downarrow \Gamma_k(\text{"}\circ\text{"}) & & \\
\Gamma_k(Hom(M,L)) & \xrightarrow{\beta_S} & Hom(S_k(M), S_k(L))
\end{array}$$

BEW.: Für $\prod_{i \in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(Hom(N,L))$, $\prod_{j \in J} g_j^{[\gamma_j]} \in \Gamma_k(Hom(M,N))$ und $m_1 \vee \ldots \vee m_k \in S_k(M)$ gilt : $\beta_S(\prod_i f_i^{[\alpha_i]}) \circ \beta_S(\prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \vee \ldots \vee m_k) =$

$$= \beta_S(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})((kan_S^* \circ \beta_S)(\prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) \underset{(D_3)}{=}$$

$$= \beta_S(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(((kan_S)_* \circ \beta_T)(\prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) =$$

$$= (kan_S^* \circ \beta_S)(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(\beta_T(\prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) =$$

$$= \underset{(D_3)}{} \operatorname{kan}_S(\beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]}) \circ \beta_T(\prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) \underset{6.2.3.(D_5)}{=}$$

$$= \operatorname{kan}_S(\beta_T \circ \Gamma_k("\circ") \circ \mu_{Hom..Hom..}(\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \otimes \prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) =$$

$$= \underset{(D_3)}{} \beta_S \circ \Gamma_k("\circ") \circ \mu_{Hom..Hom..}(\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \otimes \prod_j g_j^{[\gamma_j]})(m_1 \vee \ldots \vee m_k) \quad \blacksquare$$

In Formeln schreibt sich das Lemma:

7.1.6. $(\prod_i S_{\alpha_i}(f_i)) \circ (\prod_j S_{\beta_j}(g_j)) =$

$$= \sum_{(\gamma_{ij}) \in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j} S_{\gamma_{ij}}(f_i \circ g_j) ,$$

wenn $\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(\mathrm{Hom}(N,L))$ und $\prod_j g_j^{[\beta_j]} \in \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N))$ sind.

7.1.7.KOR.: $\beta_S : (\Gamma_k(\mathrm{End}M), \tau) \longrightarrow (\mathrm{End}S_k(M),)$ ist ein R-Algebra-Homomorphismus. $\blacksquare$

$S_k(M)$ trägt somit die Struktur eines Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Moduls. Das Aussehen dieser Struktur ergibt sich für $\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(\mathrm{End}M)$ und $m_1 \vee \ldots \vee m_k \in S_k(M)$ zu :

7.1.8. $(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \vee \ldots \vee m_k) = (\prod_i S_{\alpha_i}(f_i))(m_1 \vee \ldots \vee m_k) =$

$$= \sum_{\sigma \in K_k((\alpha_i)_i)} \bigvee_i (f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}) \vee \ldots \vee f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}))$$

Ist A R-Algebra und f:A ——>EndM R-Algebra-Hom., d.h. M

Links-A-Algebra-Modul, dann ist

$\Gamma_k(A) \xrightarrow{\Gamma_k(f)} \Gamma_k(\mathrm{End}M) \xrightarrow{\beta_S} \mathrm{End}S_k(M)$ R-Algebra-Hom., d.h. $S_k(M)$ ist Links-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul. (Analoges gilt für Rechtsstrukturen.)

Für $m_1 \vee \ldots \vee m_k \in S_k(M)$ und $\prod_i a_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A)$ gilt:

7.1.9. $$(\prod_i a_i^{[\alpha_i]})(m_1 \vee \ldots \vee m_k) = \sum_{\sigma \in K_k((\alpha_i)_i)} \bigvee_i (a_i m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)} \vee \ldots \vee a_i m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}).$$

Insbesondere trägt Hom(M,N) eine Links-EndN-Rechts-EndM-Struktur und damit $\mathrm{Hom}(S_k(M), S_k(N))$ eine Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}N)$-Rechts-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Struktur. Aus 7.1.5. folgt sofort:

7.1.10. KOR.: $\beta_S: \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_k(M), S_k(N))$ ist Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}N)$-Rechts-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Algebra-Modul-Homomorphismus. ■

7.2. Die Identität auf R liefert einen R-Algebra-Homomorph. $\underline{\mu}: S(R) \longrightarrow R$ mit $r_1 \vee \ldots \vee r_k \longrightarrow r_1 r_2 \ldots r_k \quad \forall r_i \in R$. Da Hom(X,Y) Bifunktor von R-COG × R-ALG nach R-ALG ist, ist

$\underline{\mu_*}: (\mathrm{Hom}(S(M), S(R)), *) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(S(M), R), *)$ mit

$f \longmapsto \mu \circ f \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(S(M), S(R))$ ein R-Algebra-Hom.. Es gilt $\mu_*(\mathrm{Hom}(S_k(M), S_k(R))) \subset \mathrm{Hom}(S_k(M), R)$. Die entsprechende Einschränkung soll mit $\underline{\mu_{*k}}$ oder wieder mit μ_* bezeichnet werden. Ist $\underline{\mu_k} := \mu|_{S_k(R)}$, so gilt: $\mu_{*k} = (\mu_k)_*$.

μ_k ist Isomorphismus mit Inversem $\mu_k^{-1}: R \longrightarrow S_k(R)$ gegeben

durch $r \longmapsto r \cdot 1_R \vee \ldots \vee 1_R$ (k-mal). Damit ist auch μ_{*k} bzw. μ_{k*}: $\mathrm{Hom}(S_k(M), S_k(R)) \longrightarrow S_k(M)^*$ ein R-Modul-Isomorphismus. Im Weiteren werden $\mathrm{Hom}(S_k(M), S_k(R))$ und $S_k(M)^*$ bei Bedarf über μ_{k*} identifiziert.

7.2.1.DEF.: θ_S: $\Gamma(M^*) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_o} S_i(M)^* \subset S(M)^*$ sei der durch $\theta_S := \mu_* \circ \beta_S$ gegebene R-Algebra-Hom. ($\bigoplus_i S_i(M)^*$ mit Convolutionsstruktur!).

θ_S ist graduiert vom Grad 0. Die homogenen Komponenten seien wieder mit $\theta_S : \Gamma_k(M^*) \longrightarrow S_k(M)^*$ bezeichnet.

7.2.2. $\forall \prod_{i \in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M^*)$: $\theta_S\left(\prod_{i \in I} f_i^{[\alpha_i]}\right) = \mu \circ \prod_i S_{\alpha_i}(f_i) = \prod_i \mu \circ S_{\alpha_i}(f_i)$

Daraus ergibt sich auch sofort, daß θ_S natürliche Transformation ist.

$\Gamma(M)^*$ trägt mit der Convolution eine kommutative R-Algebra-Struktur. Die kanonische Einbettung $M^* \longrightarrow \Gamma(M)^*$ liefert dann, wegen der universellen Eigenschaft der Symmetrischen Algebra ([Bou 74] III§6.1 Prop.2) einen R-Algebra-Hom.

7.2.3.DEF.: θ_Γ: $S(M^*) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_o} \Gamma_i(M)^* \subset \Gamma(M)^*$ sei der eindeutig bestimmte graduierte R-Algebra-Hom. vom Grad 0 mit $f_1 \vee \ldots \vee f_k \longrightarrow f_1 * \ldots * f_k \quad \forall f_i \in M^*$.

Für $f_i \in N^*$ ($i \in \underline{k}$), $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ und $\prod_i m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(M)$ gilt:

$\Gamma(f)^*\ (f_1^*\ldots^*f_k)\ (\prod_i m_i^{[\alpha_i]}) = f_1^*\ldots^*f_k\ (\prod_i f(m_i)^{[\alpha_i]}) =$

$= f_1\circ f^* f_2\circ f^*\ldots^* f_k\circ f\ (\prod_i m_i^{[\alpha_i]})$. Daraus ergibt sich sofort:

θ_Γ ist natürliche Transformation.

7.2.4.LEMMA: Ist M Links-A-Algebra-Modul, so sind

$\theta_\Gamma\colon S_k(M^*) \longrightarrow \Gamma_k(M)^*$ und $\theta_S\colon \Gamma_k(M^*) \longrightarrow S_k(M)^*$

Rechts-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul-Homomorphismen. Entsprechendes gilt für Rechts-Strukturen auf M.

BEW.: θ_Γ: Für $f_1\vee\ldots\vee f_k \in S_k(M^*)$ und $\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A)$ gilt:

$\theta_\Gamma((f_1\vee\ldots\vee f_k)\ \prod_i a_i^{[\alpha_i]}) =$ (vgl. 7.1.9. Rechts-Version!)

$= \sum_{\sigma\in K_k((\alpha_i)_i)} \prod_i f_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}(a_i)\cdot\ldots\cdot f_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}(a_i)$

Ist $\omega\colon A\longrightarrow \mathrm{End}M$ die A-Algebra-Modul-Struktur auf M, so gilt weiter:

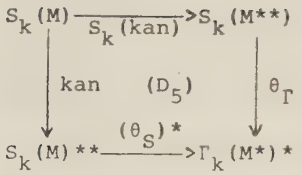
$(\prod_{j\in\underline{k}} f_j)\cdot\prod_i a_i^{[\alpha_i]} = (\prod_{j\in\underline{k}} f_j)\circ\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(\omega(a_i)) =$

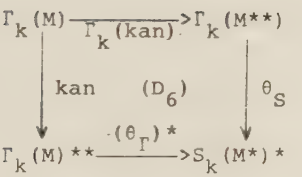
$= \prod_j \Gamma_1(f_j)\circ\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(\omega(a_i)) \overset{2.2.10.}{=}$

$= \sum_{(\gamma_{ji})\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \prod_{j,i} \Gamma_{\gamma_{ji}}(f_j\cdot a_i)$. Die Behauptung folgt mit 5.3.2..

θ_S: Nach 7.1.10. reicht es z.z.,daß $\mu_*\colon \mathrm{Hom}(S_k(M),S_k(R)) \longrightarrow S_k(M)^*$ Rechts-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul-Hom. ist, was aber trivial ist, da die $\Gamma_k(A)$-Struktur an $S_k(M)$ festgemacht ist. ∎

Zwischen θ_Γ und θ_S gelten die folgenden Beziehungen:





(kan:$X \longrightarrow X^{**}$ gegeben durch $\forall x \in X$: $x \longmapsto (f \longmapsto f(x)\ \forall f \in X^*)$)

BEW.: (D_5): Für $m_1 \vee \ldots \vee m_k \in S_k(M)$ und $\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(M^*)$ gilt mit $\hat{x} := kan(x)$:

$$\theta_\Gamma(\hat{m}_1 \vee \ldots \vee \hat{m}_k)\left(\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]}\right) = \hat{m}_1 * \ldots * \hat{m}_k \left(\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]}\right) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(1,\ldots,1)\ k\text{-mal})} \prod_{j\in \underline{k}} \hat{m}_j \left(\prod_{i\in I} f_i^{[\gamma_{ij}]}\right) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ji})\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \prod_{j\in \underline{k}} \prod_{i\in I} f_i(m_j)^{[\gamma_{ji}]} .$$

$$(\theta_S)^*\left(\widehat{m_1 \vee \ldots \vee m_k}\right)\left(\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]}\right) = \widehat{m_1 \vee \ldots \vee m_k}\left(\prod_{i\in I} \mu \circ S_{\alpha_i}(f_i)\right) =$$

$$= \prod_{i\in I} \mu \circ S_{\alpha_i}(f_i)\ (m_1 \vee \ldots \vee m_k) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K((\alpha_i)_i)} \prod_{i\in I} f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}) \cdot \ldots \cdot f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K((\alpha_i)_i)} \overline{\sigma}\left(\bigotimes_{\underline{i}} f_i^{\otimes \alpha_i}\right)(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) \overset{5.3.1.+5.3.6.}{=}$$

$$= \sum_{(\gamma_{ji})\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \bigotimes_{j\in \underline{k}} \left(\bigotimes_{i\in I} f_i^{\otimes \gamma_{ji}}\right)(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ji})\in M(1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \prod_{j\in \underline{k}} \prod_{i\in I} f_i(m_j)^{\gamma_{ji}} .$$

(D_6): Für $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(M)$ und $f_1 \vee \ldots \vee f_k \in S_k(M^*)$ gilt:

$$\theta_S\Big(\prod_{i\in I}\widehat{m}_i^{[\alpha_i]}\Big)(f_1\vee\ldots\vee f_k) = \Big(\prod_{i\in I}\mu\circ S_{\alpha_i}(\widehat{m}_i)\Big)(f_1\vee\ldots\vee f_k) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\overline{K_k((\alpha_i)_i)}} \prod_{i\in I} f_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}(m_i)\ldots f_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}(m_i) =$$

$$= (f_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}f_k)\Big(\sum_{\sigma\in\overline{K_k((\alpha_i)_i)}} \overline{\sigma}\Big(\bigotimes_i m_i^{\otimes\alpha_i}\Big)\Big) \overset{5.3.1.+5.3.6.}{=}$$

$$= (f_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}f_k)\Big(\sum_{(\gamma_{ji})\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \bigotimes_{j\in\underline{k}}\Big(\bigotimes_{i\in I} m_i^{\otimes\gamma_{ji}}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ji})\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \prod_{j\in\underline{k}}\prod_{i\in I} f_j(m_i)^{\gamma_{ji}} .$$

$$\widehat{\prod_i m_i^{[\alpha_i]}}\,(\theta_\Gamma(f_1\vee\ldots\vee f_k)) = f_1*\ldots*f_k\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(1,\ldots,1))} \prod_j f_j\Big(\prod_i m_i^{[\gamma_{ij}]}\Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{ji})\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \prod_j\prod_i f_j(m_i)^{\gamma_{ji}} . \blacksquare$$

7.2.5.SATZ: Für einen (endlich-erzeugt) projektiven R-Modul M mit Dualbasis $\{e_i,f_j\}_{i,j\in I}$ gilt:

a) $S_k(M)$ ist (endlich-erzeugt) projektiv mit Dualbasis

$$\Big\{\bigvee_{i\in I} e_i^{\vee\alpha_i}\,,\ \prod_{j\in I}\mu\circ S_{\beta_j}(f_j)\Big\}_{|\alpha|=k=|\beta|} \qquad (k\in\mathbb{N}_o).$$

b) $\Gamma_k(M)$ ist (endlich-erzeugt) projektiv mit Dualbasis

$$\Big\{\prod_{i\in I} e_i^{[\alpha_i]}\,,\ \prod_{j\in I} f_j^{\beta_j}\Big\}_{|\alpha|=k=|\beta|} \qquad (k\in\mathbb{N}_o) .$$

c) Ist M endlich-erzeugt projektiv, so sind für jedes $k\in\mathbb{N}_o$

$\theta_\Gamma: S_k(M^*)\longrightarrow\Gamma_k(M)^*$ und $\theta_S:\Gamma_k(M^*)\longrightarrow S_k(M)^*$ Isomorph. .

BEW.: a) Für $m_1 \vee \ldots \vee m_k \in S_k(M)$ ist $m_1 \vee \ldots \vee m_k =$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k \in I} f_{i_1}(m_1)\ldots f_{i_k}(m_k)\, e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_k} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{\sigma \in K_k((\alpha_i)_i)} \bar{\sigma}\Big(\bigotimes_{i \in I} f_i^{\otimes \alpha_i}\Big)(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) \bigvee_{i \in I} e_i^{\vee \alpha_i} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \prod_{i \in I} \mu \circ S_{\alpha_i}(f_i)(m_1 \vee \ldots \vee m_k) \bigvee_{i \in I} e_i^{\vee \alpha_i} .$$

b) $\Gamma_k(M) \ni \prod_{l \in L} m_l^{[\gamma_l]} = \prod_{l \in L} \Big(\sum_{i \in I} f_i(m_l) e_i\Big)^{[\gamma_l]} =$

$$= \prod_{l \in L} \Big(\sum_{(\alpha_{li})_i \in \bar{P}_{\gamma_l, I}} \prod_{i \in I} f_i(m_l)^{\alpha_{li}} \prod_{i \in I} e_i^{[\alpha_{li}]} \Big) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{(\alpha_{li}) \in M((\gamma_l)_l;(\alpha_i)_i)} \prod_{i \in I} \prod_{l \in L} f_i(m_l)^{\alpha_{li}} \prod_{i \in I} [\alpha_{li}]_l \prod_{i \in I} e_i^{[\alpha_i]} .$$

$$\prod_{i \in I} f_i^{\alpha_i} \Big(\prod_{l \in L} m_l^{[\gamma_l]} \Big) = \sum_{(\gamma_{il}) \in M((\alpha_i)_i;(\gamma_l)_l)} \prod_{i \in I} \Big(f_i^{*\alpha_i} \Big(\prod_{l \in L} m_l^{[\gamma_{il}]} \Big) \Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{li}) \in M((\gamma_l)_l;(\alpha_i)_i)} \prod_{i \in I} \Big(\sum_{(\zeta_{ilj})_{lj}} \prod_{j \in \underline{\alpha_i}} f_i\Big(\prod_{l \in L} m_l^{[\zeta_{ilj}]} \Big) \Big) =: Z \text{ , wobei}$$

die $(\zeta_{ijl})_{lj}$ jeweils die Menge $M((\gamma_{li})_l;(1,\ldots,1))$ mit α_i Einsen durchlaufen.

$$Z = \sum_{(\gamma_{li}) \in M((\gamma_l)_l;(\alpha_i)_i)} \prod_{i \in I} \Big(\sum_{(\zeta_{ilj})_{lj}} \prod_{j \in \underline{\alpha_i}} \prod_{l \in L} f_i(m_l)^{\zeta_{ilj}} \Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{li})} \prod_{i \in I} \Big(\sum_{(\zeta_{ilj})_{lj}} \prod_{l \in L} f_i(m_l)^{\gamma_{li}} \Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{li}) \in M((\gamma_l)_l;(\alpha_i)_i)} \prod_{i \in I} [\gamma_{li}]_l \prod_{i \in I} \prod_{l \in L} f_i(m_l)^{\gamma_{li}} .$$

c) Nach a) und b) sind θ_Γ und θ_S für jedes k surjektiv .

Aus (D_5) und (D_6) ergibt sich dann die Behauptung. ■

Ist jetzt M freier R-Modul mit Basis $\{e_i\}_{i\in I}$, und ist für $i\in I$ $f_i\in M^*$ mit $f_i(e_j) := \delta_{ij}$ $\forall j\in I$, so soll für eine Teilmenge M' von M die Aussage "M' hat die Eigenschaft (E)" heißen, daß folgendes gilt:

(E) Ist $\sum_{j\in \mathbb{N}_o^{(I)}} \alpha_j \prod_{i\in I} X_i^{j_i}$ ein Element aus $R[X_i]_{i\in I}$, und ist $\forall m\in M' : \sum_{j\in \mathbb{N}_o^{(I)}} \alpha_j \prod_{i\in I} f_i(m)^{j_i} = 0$, so folgt daraus, daß alle $\alpha_j = 0$ sind.

7.2.6.BEISPIELE: 1) Ist R ein unendlicher Körper, so hat M die Eigenschaft (E).

BEW:: Widerspruchsannahme: Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß das Polynom in der Formulierung von (E) sogar aus $R[X_{i_1},\dots,X_{i_n}]$ ist und daß ein j existiert mit $j_i=0$ für $i\neq i_1,\dots,i_n$ sowie $\alpha_j\neq 0$. Dann gibt es eine Nicht-Nullstelle $(r_1,\dots,r_n)\in R^n$ dieses Polynoms. Setze $a := \sum_{k\in \underline{n}} r_k e_{i_k}$.

Dann gilt $f_i(a) = \sum_{k\in \underline{n}} r_k f_i(e_{i_k}) = r_k$, falls $i=i_k$ für ein $k\in \underline{n}$, und 0 sonst. Somit gilt :

$(f_{i_1}(a))^{j_{i_1}}\dots(f_{i_n}(a))^{j_{i_n}} = r_1^{j_{i_1}}\dots r_n^{j_{i_n}}$ und (E) steht im Widerspruch dazu, daß $(r_1,\dots,r_n)$ keine Nullstelle ist. ■

2) ([Thr 42] Le.III) Ist R ein unendlicher Körper und $M = \mathrm{End}(R^m)$, so hat $\mathrm{Aut}(R^m)$ die Eigenschaft (E) (für jedes m).

7.2.8.LEMMA: Ist R ein Körper, und hat für einen R-Vektorraum M eine Teilmenge M' von M die Eigenschaft (E), so gilt für alle k aus $\mathbb{N}_o$: $\Gamma_k(M)$ wird als R-Modul erzeugt von den Elementen $m^{[k]}$ mit $m \in M'$.

BEW.: Annahme: $\Gamma_k(M) \neq M_k := [\{ m^{[k]} \mid m \in M' \}] \subset \Gamma_k(M)$.
Da R ein Körper ist, existiert dann ein $f \in \Gamma_k(M)^*$ mit $f \neq 0$ und $f(M_k) = 0$. Ist $\{e_i\}_{i \in I}$ Basis von M und $f_i \in M^*$ mit $f_i(e_k) := \delta_{ik}$, so gilt dann: $\forall m \in M' : 0 = f(m^{[k]}) \underset{7.2.5.b)}{=}$

$$= f\Big(\sum_{j \in \overline{P}_{k,I}} \Big(\prod_{i \in I} f_i^{j_i} \Big)(m^{[k]}) \prod_{i \in I} e_i^{[j_i]} \Big) =$$

$$= \sum_{j \in \overline{P}_{k,I}} \prod_{i \in I} f_i(m)^{j_i} \, f\Big(\prod_{i \in I} e_i^{[j_i]} \Big) \underset{(E)}{\Longrightarrow} f\Big(\prod_{i \in I} e_i^{[j_i]} \Big) = 0$$

für alle $(j_i) \in \overline{P}_{k,I}$. Daraus folgt $f \equiv 0$, Widerspruch. ■

Mit 7.2.6. ergibt sich jetzt sofort:

7.2.9.KOR.: Ist R unendlicher Körper, so ist $\Gamma_k(M)$ gleich der linearen Hülle $[\{m^{[k]} \mid m \in M\}]$. ■

7.2.10.KOR.: ([Thr 42]) Ist R ein unendlicher Körper, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}_o$ $\Gamma_k(\mathrm{End}(R^m)) \cong [\{g^{\otimes k} \mid g \in \mathrm{Aut}(R^m)\}]_{T_k(\mathrm{End}(R^m))}$. ■

7.2.11.LEMMA: R sei ein unendlicher Körper, M ein endlichdimensionaler R-Vektorraum und $\sum_{j \in \underline{k}_o} \psi_j \in \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_o} \Gamma_j(M)^*$. Es gilt:

$$\sum_{j \in \underline{k}_o} \psi_j = 0 \iff \forall m \in M: \sum_{j \in \mathbb{N}_o} \psi_j(m^{[j]}) = 0 .$$

BEW.: Ist $\psi_j = \sum_{i_1+\ldots+i_n=j} \alpha_i f_1^{i_1}\ldots f_n^{i_n}$ die Basisdarstellung von ψ_j, so folgt aus $\forall m\in M: \sum_{j\in\underline{k}_o} \psi_j(m^{[j]}) =$

$= \sum_{j\in\underline{k}_o} \sum_{i_1+\ldots+i_n=j} \alpha_i f_1(m)^{i_1}\ldots f_n(m)^{i_n} = 0$ nach 7.2.6.1), daß $\alpha_i=0$ ist, für alle $i=(i_k)\in\mathbb{N}_o^n$. Damit folgt: $\sum_j \psi_j=0$. ■

7.2.12.KOR.: R sei ein unendlicher Körper, M ein R-Vektorraum. Für $\psi\in L'(\Gamma(M),R) := \{f\in Hom(\Gamma(M),R) \mid \forall M\geq M' \text{endlich-erz.UR.}\ \exists k\in\mathbb{N}_o\ \forall l>k : f\circ\Gamma(\iota_{M'})(\Gamma_l(M'))=0 \quad (\iota_{M'}:\Gamma(M')\longrightarrow\Gamma(M) \text{ kan.})\}$ gilt:

$\psi\equiv 0 \Longleftrightarrow \forall m\in M: \sum_{j\in\mathbb{N}_o} \psi(m^{[j]}) = 0$.

BEW.: "$\Longrightarrow$" klar, "$\Longleftarrow$": Zu zeigen: $\psi(x)=0$ für alle $x\in\Gamma(M)$. $\forall x\in\Gamma(M)\ \exists M\geq M'$ endl.-erz. UR.: $x\in\Gamma(\iota_{M'})(\Gamma(M'))$. Es reicht also z.z.: $\psi\circ\Gamma(\iota_{M'})\equiv 0$ $\forall$endl.-erz. Unterräume M' von M.

$\sum_{j\in\mathbb{N}_o} \psi\circ\Gamma(\iota_{M'})(m'^{[j]}) = \sum_{j\in\mathbb{N}_o} \psi(\iota_{M'}(m')^{[j]}) = 0 \quad \forall m'\in M'$.

Nach der Vorraussetzung für ψ ist klar, daß die Behauptung aus 7.2.11. folgt. ■

7.2.13.BEM.: Für ein Element $\psi\in L'(\Gamma(M),R)$ gilt also: ψ ist genau dann identisch 0, wenn das zugehörige Polynomgesetz (1.4.) 0 ist. Ebenso stimmen zwei Hom. ψ_1 und ψ_2 aus $L'(\Gamma(M),R)$ genau dann überein, wenn die zugehörigen Polynomgesetze übereinstimmen (R unendlicher Körper!).

Nach dieser Exkursion soll jetzt der Zusammenhang zwischen

θ_Γ bzw. θ_S einerseits und dem kanonischen Homomorphismus $\beta'_T : T_k(M^*) \longrightarrow T_k(M)^*$ (vgl. 6.2., beachte $T_k(R) \cong R$!) andererseits hergestellt werden. Dieser drückt sich in dem kommutativen Diagramm (D_7) aus.

(D_7)

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_k(M^*) & \xrightarrow{\iota_\Gamma} & T_k(M^*) & \xrightarrow{\mathrm{kan}_S} & S_k(M^*) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta_S} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'_T} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_\Gamma} \\
S_k(M)^* & \xrightarrow{(\mathrm{kan}_S)^*} & T_k(M)^* & \xrightarrow{(\iota_\Gamma)^*} & \Gamma_k(M)^*
\end{array}$$

BEW.: Berücksichtigt man die Definitionen von β_T und θ_S, so ist das linke Diagramm im wesentlichen (D_3).
Für das rechte Diagramm betrachte $f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \in T_k(M^*)$:

$(\iota_\Gamma)^* \circ \beta'_T(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k) = f_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} f_k \circ \iota_\Gamma$

$\theta_\Gamma \circ \mathrm{kan}_S(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k) = f_1 * \ldots * f_k = f_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} f_k \circ \pi_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \pi_1 \circ \Delta_{k-1}$.

Man überlegt sich leicht, daß $\pi_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \pi_1 \circ \Delta_{k-1}$ mit ι_Γ übereinstimmt. ■

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Γ und S soll nicht unerwähnt bleiben.

7.2.14.HILFSSATZ: Durch $(m,n) \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (m^{[k]} \otimes n^{\vee k}) T^k$ wird eine R-bilineare Abbildung von $M \times N$ nach $\varepsilon(\Gamma(M) \otimes S(N))$ definiert.

BEW.: a) $(m^{[i]} \otimes n^{\vee i})(m^{[j]} \otimes n^{\vee j}) = m^{[i]} m^{[j]} \otimes n^{\vee i+j} =$
$= [i,j]\, m^{[i+j]} \otimes n^{\vee i+j}$

b) $m^{[0]} \otimes n^{\vee 0} = 1_R \otimes 1_R = 1_{\Gamma(M) \otimes S(N)}$

c) $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} ((rm)^{[i]} \otimes n^{\vee i}) T^i = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (m^{[i]} \otimes (rn)^{\vee i}) T^i = r \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (m^{[i]} \otimes n^{\vee i}) T^i$

d) $\sum_{i\in\mathbb{N}_o}(m^{[i]}\otimes n^{\vee i})T^i \cdot \sum_{j\in\mathbb{N}_o}(m'^{[j]}\otimes n^{\vee j})T^j =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{i+j=k} m^{[i]}{}_{m'}{}^{[j]}\otimes n^{\vee i+j}\Big)T^k = \sum_{k\in\mathbb{N}_o}((m+m')^{[k]}\otimes n^{\vee k})T^k$

e) $\sum_{i\in\mathbb{N}_o}(m^{[i]}\otimes n^{\vee i})T^i \cdot \sum_{j\in\mathbb{N}_o}(m^{[j]}\otimes n'^{\vee j})T^j = \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{i+j=k} m^{[i]}{}_m{}^{[j]}\otimes n^{\vee i}{}_{n'}{}^{\vee j}\Big)T^k =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}(m^{[k]}\otimes \sum_{i+j=k}[i,j]\, n^{\vee i}{}_{n'}{}^{\vee j})T^k = \sum_{k\in\mathbb{N}_o}(m^{[k]}\otimes(n+n')^{\vee k})T^k$ ■

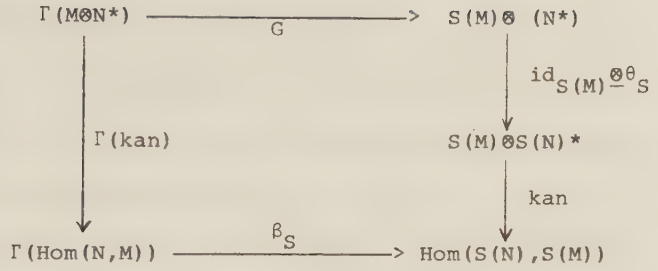
7.2.15.LEMMA: Nach der universellen Eigenschaft von Γ existiert genau ein R-Algebra-Hom. von $\Gamma(M\otimes N)$ nach $\Gamma(M)\otimes S(N)$ mit $(m\otimes n)^{[i]} \longmapsto m^{[i]}\otimes n^{\vee i}$ $\forall m\in M,\ n\in N,\ i\in\mathbb{N}_o$. ■

Der Algebra-Hom. aus 7.1.15 ist offenbar eine natürliche Transformation.
Es besteht ein enger Zusammenhang zu β_Γ und β_S.

7.2.16.LEMMA: Ist F der R-Algebra-Hom. aus 7.2.15. und G die "getwistete" Version ($(m\otimes n)^{[i]} \longmapsto m^{\vee i}\otimes n^{[i]}$), so kommutieren die folgenden Diagramme in R-ALG . Dabei ist für R-Moduln X und Y kan:$X\otimes Y^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y,X)$ der durch $x\otimes f \longmapsto (\forall y\in Y:\ y \longmapsto f(y)x)$ $\forall x\in X$ gegebene kanonische Homomorph..

(D_8)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(M\otimes N^*) & \xrightarrow{\quad F\quad} & \Gamma(M)\otimes S(N^*) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma(\mathrm{kan})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\Gamma(M)}\otimes\theta_\Gamma} \\
\Gamma(\mathrm{Hom}(N,M)) & \xrightarrow{\quad\beta_\Gamma\quad} & \mathrm{Hom}(\Gamma(N),\Gamma(M)) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{kan}} \\
 & & \Gamma(M)\otimes\Gamma(N)^*
\end{array}$$



BEW.: (D_8): $\mathrm{kan}\circ id_{\Gamma(M)} \underline{\otimes} \theta_\Gamma\ (m^{[i]} \otimes f^{\vee i}) = \mathrm{kan}(m^{[i]} \otimes f^{*i})$ für $m \in M$, $f \in N^*$, $i \in \mathbb{N}_0$. Weiter: $\beta_\Gamma \circ \Gamma(\mathrm{kan})((m\otimes f)^{[i]}) = \Gamma_i(\mathrm{kan}(m\otimes f))$.

Für $\prod_j n_j^{[\alpha_j]} \in \Gamma(N)$ hat man: $\mathrm{kan}(m^{[i]} \otimes f^{*i})(\prod_j n_j^{[\alpha_j]}) =$

$$= f^{*i}(\prod_j n_j^{[\alpha_j]}) m^{[i]} = m^{[i]} \sum_{(\gamma_{pq}) \in M((1,..,1);(\alpha_j)_j)} \prod_p f(\prod_j n_j^{[\gamma_{pj}]}) =$$

$$= m^{[i]} \sum_{(\gamma_{pj})} \prod_{p\in j} f(n_j)^{\gamma_{pj}} = m^{[i]} |K((\alpha_i)_i)| \prod_j f(n_j)^{\alpha_j} .$$

$$\Gamma_i(\mathrm{kan}(m\otimes f))(\prod_j n_j^{[j]}) = \prod_j (f(n_j)m)^{[\alpha_j]} = \prod_j f(n_j)^{\alpha_j} [\alpha_j]_j\ m^{[i]}$$

(D_9): $(m \in M,\ f \in N^*,\ i \in \mathbb{N}_0,\ n_1 \vee \ldots \vee n_i \in S_i(N))$

$$\mathrm{kan}\circ id_{S(M)} \underline{\otimes} \theta_S (m^{\vee i} \otimes f^{[i]})(n_1 \vee \ldots \vee n_i) = m^{\vee i} \cdot \mu \circ S_i(f)(n_1 \vee \ldots \vee n_i) =$$

$$= m^{\vee i} \prod_{j\in \underline{i}} f(n_j) . \qquad \beta_S \circ \Gamma(\mathrm{kan})((m\otimes f)^{[i]})(n_1 \vee \ldots \vee n_i) =$$

$$= S_i(\mathrm{kan}(m\otimes f))(n_1 \vee \ldots \vee n_i) = (\prod_{j\in \underline{i}} f(n_i))\ m^{\vee i} . \ \blacksquare$$

In Kapitel 17) werden für die "Äußere Algebra" Λ an Stelle von S analoge Diagramme erstellt werden. Während dort die Paarung $\langle \Lambda(M) | \Lambda(M)^* \rangle$ gerade den R-Modul-Hom. von $\Gamma(M\otimes M^*)$ nach R liefert, der im wesentlichen die wichtige Determi-

nante darstellt, scheinen die hier aus den Paarungen $\langle \Gamma(M) | \Gamma(M)^* \rangle$ und $\langle S(M) | S(M)^* \rangle$ natürlich resultierenden $((D_8),(D_9))$ Homomorphismen von $\Gamma(M \otimes M^*)$ nach R bisher nirgendwo verwendet worden zu sein. Der Grund mag sein, daß durch das Auftreten von Binomialkoeffizienten hier eine Charakteristikabhängigkeit resultiert.
Für die folgenden Betrachtungen zur Paarung zwischen Γ und S soll kan:X ——> X** der kan.Hom. sein, der auch schon bei $(D_5),(D_6)$ verwendet wurde.

1) $\langle x|y \rangle_{\Gamma 1} := \theta_\Gamma(y)(x) \quad \forall x \in \Gamma(M),\ y \in S(M^*)$ definiert eine Paarung $\langle \Gamma(M) | S(M^*) \rangle_{\Gamma 1}$.
$\langle x_1 \otimes x_2 | y_1 \otimes y_2 \rangle_{\Gamma 2} := \langle x_1 | y_1 \rangle_{\Gamma 1} \langle x_2 | y_2 \rangle_{\Gamma 1} \qquad x_1, x_2 \in \Gamma(M); y_1, y_2 \in S(M^*)$
definiert eine Paarung $\langle \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) | S(M^*) \otimes S(M^*) \rangle_{\Gamma 2}$.
Für alle $x, x_1, x_2 \in \Gamma(M)$ und $y, y_1, y_2 \in S(M^*)$ gilt:

7.2.17. $\langle x | \mu_{S(M^*)}(y_1 \otimes y_2) \rangle_{\Gamma 1} = \langle \Delta_{\Gamma(M)}(x) | y_1 \otimes y_2 \rangle_{\Gamma 2}$

BEW.: $\theta_\Gamma(\mu_{S(M^*)}(y_1 \otimes y_2))(x) \underset{\theta_\Gamma \text{ Alg.-Hom.}}{=} \theta_\Gamma(y_1) * \theta_\Gamma(y_2)(x) =$
$= \theta_\Gamma(y_1) \underline{\otimes} \theta_\Gamma(y_2)(\Delta_{\Gamma(M)}(x))$. Der Rest ist klar. ■

7.2.18. $\langle \mu_{\Gamma(M)}(x_1 \otimes x_2) | y \rangle_{\Gamma 1} = \langle x_1 \otimes x_2 | \Delta_{S(M^*)}(y) \rangle_{\Gamma 2}$

BEW.: $\theta_\Gamma(y)(\mu_{\Gamma(M)}(x_1 \otimes x_2)) = \text{kan}(\mu_{\Gamma(M)}(x_1 \otimes x_2))(\theta_\Gamma(y)) \underset{(D_6)}{=}$
$\theta_S \circ \Gamma(\text{kan})(\mu_{\Gamma(M)}(x_1 \otimes x_2))(y) \underset{\theta_S \text{ Alg.-Hom.}}{=}$
$= \theta_S \circ \Gamma(\text{kan})(x_1) * \theta_S \circ \Gamma(\text{kan})(x_2)\ (y) \underset{(D_6)}{=}$

$= (\theta_\Gamma)^* \circ \mathrm{kan}(x_1) * (\theta_\Gamma)^* \circ \mathrm{kan}(x_2)\ (y) =$

$= (\mathrm{kan}(x_1) \circ \theta_\Gamma \otimes \mathrm{kan}(x_2) \circ \theta_\Gamma) \circ \Delta_{S(M^*)}(y)$. Der Rest ist klar. ∎

2) $\langle u|v\rangle_{S1} := \theta_S(v)(u) \quad \forall u \in S(M),\ v \in \Gamma(M^*)$ definiert eine Paarung $\langle S(M)|\Gamma(M^*)\rangle_{S1}$.

$\langle u_1 \otimes u_2 | v_1 \otimes v_2\rangle_{S2} := \langle u_1|v_1\rangle_{S1}\langle u_2|v_2\rangle_{S1} \quad \forall u_1,u_2 \in S(M);\ v_1,v_2 \in \Gamma(M^*)$ definiert eine Paarung $\langle S(M)\otimes S(M)|\Gamma(M^*)\otimes\Gamma(M^*)\rangle_{S2}$.

Für $u,u_1,u_2 \in S(M)$ und $v,v_1,v_2 \in \Gamma(M^*)$ beweist man ähnlich wie in 1):

7.2.19. $\langle u|u_{\Gamma(M^*)}(v_1 \otimes v_2)\rangle_{S1} = \langle \Delta_{S(M)}(u)|v_1 \otimes v_2\rangle_{S2}$

7.2.20. $\langle \mu_{S(M)}(u_1 \otimes u_2)|v\rangle_{S1} = \langle u_1 \otimes u_2|\Delta_{\Gamma(M^*)}(v)\rangle_{S2}$

3) Für $x \in \Gamma(M)$ und $y \in S(M^*)$ gilt: $\theta_\Gamma(y)(x) = \mathrm{kan}(x)(\theta_\Gamma(y)) =$

$\underset{(D_6)}{=} \theta_S \circ \Gamma(\mathrm{kan})(x)(y)$. Hieraus folgt, wenn man $\langle\ |\ \rangle_{S1}$ jetzt bezüglich M^* (statt wie oben M) bildet :

7.2.21. $\langle x|y\rangle_{\Gamma 1} = \langle y|\Gamma(\mathrm{kan})(x)\rangle_{S1}$.

Weiter gilt für $u \in S(M)$ und $v \in \Gamma(M^*)$: $\theta_S(v)(u) = \mathrm{kan}(u)(\theta_S(v)) =$

$\underset{(D_5)}{=} \theta_\Gamma \circ S(\mathrm{kan})(u)(v)$. Hieraus folgt, wenn man $\langle\ |\ \rangle_{\Gamma 1}$ jetzt bezüglich M^* (statt wie oben M) bildet:

7.2.22. $\langle u|v\rangle_{S1} = \langle v|S(\mathrm{kan})(u)\rangle_{\Gamma 1}$.

Für endlich-erzeugt projektives M faßt man 7.2.17. bis 7.2.20. mit 7.2.5.b) üblicherweise zu der Aussage zusammen, daß $S(M^*)$ das graduierte Dual der Bigebra $\Gamma(M)$ ist und $\Gamma(M^*)$ das graduierte Dual der Bigebra $S(M)$.

7.3. Zwangsläufig stellt sich nun die Frage nach der Dualisierung wichtiger Homomorphismen, von denen hier nur einer wegen seiner zentralen Bedeutung herausgegriffen werden soll, nämlich $\mu_{MN}:\Gamma(M)\otimes\Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(M\otimes N)$ (als Grundlage der Multiplikation auf $\hat{\Gamma}$). Dazu soll zunächst das folgende Diagramm betrachtet werden (vgl. auch 6.1.6.(D_2)):

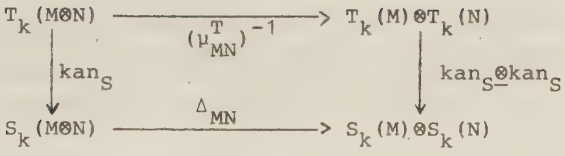
(D_{10})

$$\begin{array}{ccc} T_k(M\otimes N) & \xrightarrow{\quad (\mu^T_{MN})^{-1} \quad} & T_k(M)\otimes T_k(N) \\ & \searrow & \downarrow \mathrm{kan}_S\otimes\mathrm{kan}_S \\ & & S_k(M)\otimes S_k(N) \end{array}$$

Der sich gestrichelt ergebende R-Modul-Hom. bildet $(m_1\otimes n_1)\otimes\ldots\otimes(m_k\otimes n_k)$ ab auf $(m_1\vee\ldots\vee m_k)\otimes(n_1\vee\ldots\vee n_k)$ ($m_i\in M$, $n_j\in N$ $i,j\in\underline{k}$). Er faktorisiert ersichtlich über $S_k(M\otimes N)$ und liefert das kommutative Diagramm (D_{11}). Doch zuvor noch die Definition:

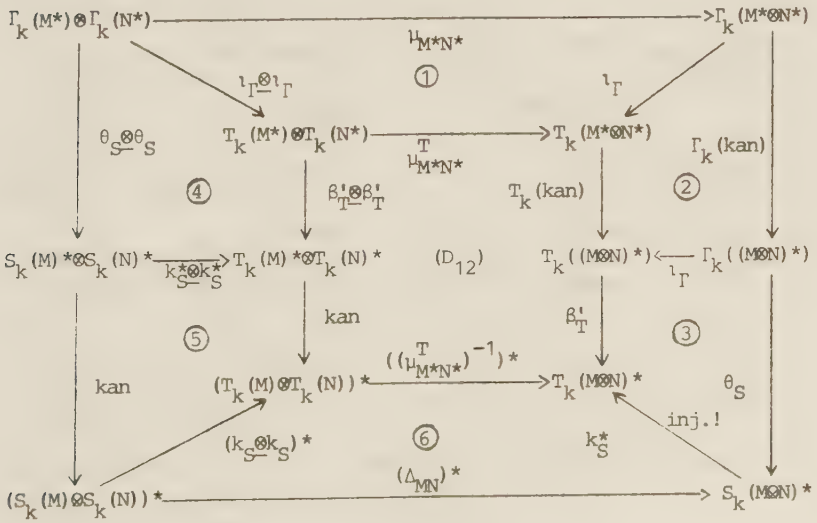
7.3.1.DEF.: $\underline{\underline{\Delta_{MN}}}: S_k(M\otimes N) \longrightarrow S_k(M)\otimes S_k(N)$ ($k\in\mathbb{N}_o$) bezeichne den durch $(m_1\otimes n_1)\vee\ldots\vee(m_k\otimes n_k) \to (m_1\vee\ldots\vee m_k)\otimes(n_1\vee\ldots\vee n_k)$ ($\forall m_i\in M$, $n_j\in N$ für $i,j\in\underline{k}$) gegebenen R-Modul-Homomorphismus.

(D_{11})



Sei $M\otimes N \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} S_i(M)\otimes S_i(N)$ der kan. Hom. mit $m\otimes n \longmapsto m\otimes n$ $\forall m\in M$, $n\in N$. Nach der universellen Eigenschaft von S existiert, da $\bigoplus_i S_i(M)\otimes S_i(N)$ R-Subalgebra von $S(M)\otimes S(N)$ ist, genau ein R-Algebra-Hom. $\Delta_{MN}: S(M\otimes N) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} S_i(M)\otimes S_i(N)$ als Fortsetzung. μ_{MN} ist homogen vom Grad 0 und die Einschränkungen auf die homogenen Komponenten stimmen mit den Homomorphismen aus 7.3.1. überein, was die gleichlautende Bezeichnung rechtfertigt.

Für den Zusammenhang von Δ_{MN} und μ_{MN} ergeben sich die Diagramme (D_{12}) und (D_{13}).

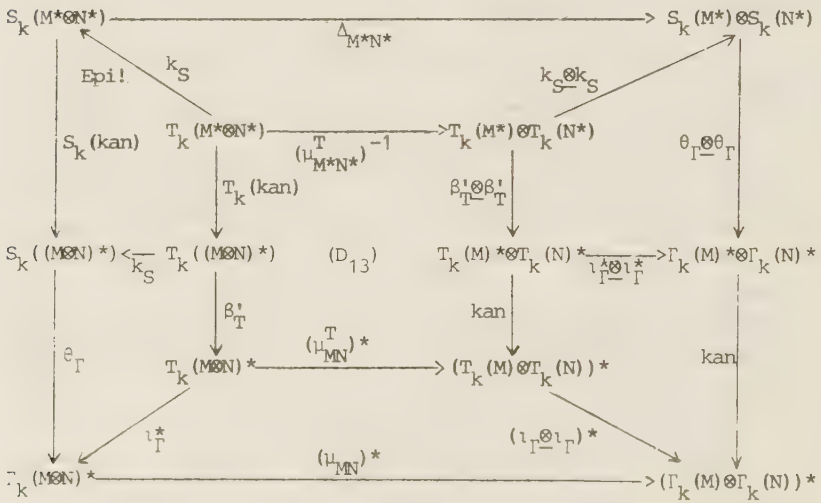


Dabei sei $k_S := kan_S$ und $kan: X^* \otimes Y^* \longrightarrow (X \otimes Y)^*$ gegeben durch $f \otimes g \longmapsto (\forall x,y: x \otimes y \longmapsto f(x)g(y))$ ein Spezialfall von von β'_T (vgl. 6.2. und 7.2.(D_7)).

BEW. der Kommutativität von (D_{12}):

① ist gerade 6.1.6.(D_2) ; ② folgt, da ι_Γ nat. Transf. ist; ③ ergibt sich mit 7.2.(D_7), ebenso ④ ; ⑤ folgt, da "kan" natürliche Transf. ist; ⑥ ist gerade (D_{11});
daß das innere Rechteck kommutiert verifiziert man leicht. Das äußere Rechteck kommutiert dann auch, da $(kan_S)^*$ ein Monomorphismus ist. ■

Sind die äußeren Spalten Isomorphismen, so ergibt sich nach Identifikation der isomorphen Moduln, daß $\mu_{M^*N^*}$ zu Δ_{MN} adjungiert ist.



Die Kommutativität von (D_{13}) beweist man ähnlich wie die von (D_{12}), wobei die Kommutativität des inneren Diagramms aus der des inneren Diagramms von (D_{12}) folgt, da $\mu^T_{M^*N^*}$ Isomorphismus ist.
Sind die äußeren Spalten von (D_{13}) Isomorphismen, so ergibt sich nach Identifikation isomorpher Moduln, daß $\Delta_{M^*N^*}$ zu μ_{MN} adjungiert ist.

7.3.2.BEM.: Genau wie man für eine R-Algebra A mit Hilfe von μ_{AA} $\Gamma_k(A)$ zur Algebra machen kann, kann man für eine Cogebra C $S_k(C)$ mit Δ_{CC} zur Cogebra machen und eine duale Theorie entwickeln. Dies soll aber hier nicht weiter verfolgt werden.

KAPITEL 8 : Die Abbildung Sh:$\Gamma(A)$ ——>$\hat{\Gamma}(A)$ und ihr Umfeld.

In diesem Kapitel wird für eine Algebra A ein zu $\Gamma(A)$ isomorpher Modul $\hat{\Gamma}(A)$ eingeführt, der, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, eine von $\mu_{\Gamma(A)}$ abweichende Algebra-Struktur trägt und für alles Folgende von zentraler Bedeutung ist. $\hat{\Gamma}(A)$ ist das Bild von $\Gamma(A)$ unter einem kanonischen Homomorphismus "Sh", der hier abgeleitet wird von der Linksmultiplikation mit id_C (C Bigebra) in (EndC,*). Das geschieht in Abschnitt 4. Neben ihrem Motivationscharakter hat diese Ableitung vor allem Bedeutung für die Anwendungen in den Kapiteln 10 und 18.
In den Abschnitten 1-3 werden als Hintergrund-Information

Homomorphismen C* ——> EndC betrachtet, die in der Theorie der Cogebren häufig auftreten und nah verwandt sind mit dem Analogon von Sh in End(EndC). Insbesondere wird in Abschnitt 3 eine Anwendung auf $\Gamma(M)$ und das graduierte Dual $S(M^*)$ angegeben; als eine der Grundlagen des sog. "Umbral Calculus" wird die Algebra der "Shift-invarianten Operatoren" charakterisiert.
Die Abschnitte 1-3 dienen der Hintergrunderhellung und der Motivation für die Betrachtungen des Abschnittes 4 und späterer Kapitel.

8.1. A sei eine A-Algebra. A ist dann in natürlicher Weise Links-$A^e := A \otimes A^{op}$-Modul bzw. zweiseitiger A/R-Modul (vgl. [DeM/Ing 71]II 1 wegen Def. und Äquivalenz). Die Links-A-Struktur sei dabei gegeben durch den R-Algebra-Monomorphismus $\underline{\lambda}: A \longrightarrow \mathrm{End}A$; $\underline{\lambda_a} := \lambda(a)$ soll also die Linksmultiplikation mit $a \in A$ sein. Entsprechend liefere der R-Algebra-Monomorphismus $\underline{\rho}: A^{op} \longrightarrow \mathrm{End}A$ die Rechts-A-Struktur. Aus λ und ρ ergeben sich sofort die R-Algebra-Homomorphismen:
$\underline{\lambda'}: A^{op} \longrightarrow \mathrm{End}(A^*)$ mit $\underline{\lambda'_a} := (\lambda_a)^*$ und $\underline{\rho'}: A \longrightarrow \mathrm{End}(A^*)$ mit $\underline{\rho'_a} := (\rho_a)^*$. λ'_a und ρ'_a sind also die zu λ_a bzw. $\rho_a \in \mathrm{End}A$ adjungierten Operatoren aus $\mathrm{End}_R(A^*)$ mit
$\langle \lambda'_a(f) | b \rangle = \langle f | \lambda_a(b) \rangle = \langle f | ab \rangle$ und $\langle \rho'_a(f) | b \rangle = \langle f | \rho_a(b) \rangle = \langle f | ab \rangle$.
λ' und ρ' liefern zusammen gerade die kanonische Rechts-A^e-Modul-Struktur auf $A^* = \mathrm{Hom}_R({}_{A^e}{}_{-R^A}, {}_R R)$ (vgl [And/Ful 74]4.4).

Sei nun speziell $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$ graduierte R-Algebra mit $A_0 = R$ und $1_A = 1_R$. Dann trägt mit A auch $\bar{A} := \prod_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$ die Struktur

einer R-Algebra (vgl. 1.3.1.). Einselement ist $(\delta_{i0}1_R)_i$.
Ist etwa $\overline{\lambda}: \overline{A} \longrightarrow \mathrm{End}\overline{A}$ die Links-Struktur, so gilt für $a \in Ac\overline{A}$: $\overline{\lambda}_a(A) \subset A$ und $\overline{\lambda}_a|_{A,A} = \lambda_a$.

8.2. C sei jetzt eine R-Cogebra. Dann trägt A:=C* mit der Convolution eine R-Algebra-Struktur (vgl. etwa [Swe 69]1.1). Ferner ist C zweiseitiger A_R-Modul via
L: $C^* \longrightarrow \mathrm{End}C$ mit $L_f := L(f) := (id_C \otimes f) \circ \Delta_C \quad \forall f \in C^*$ (genauer müßte es eigentlich heißen $\mu_R \circ (id_C \otimes f) \circ \Delta_C$!) und
R: $(C^*)^{op} \longrightarrow \mathrm{End}C$ mit $R_f := R(f) := (f \otimes id_C) \circ \Delta_C \quad \forall f \in C^*$.

Spezialfälle dieser Strukturen werden u.a. betrachtet in
- [Buc/Eis 75] (C cocommutativ => $R_f = L_f$)
- [Rom/Rot 78] (C=K[X])
- [Hei/Swe 69] (R Körper).

Sind λ und ρ Links- bzw. Rechtsmultiplikation auf A, so gilt:

8.2.1. $\lambda = R'$ und $\rho = L'$, d.h.: $\forall f \in C^*$ ist $\lambda_f \in \mathrm{End}(C^*)$ der zu $R_f \in \mathrm{End}C$ adjungierte Operator und $\rho_f \in \mathrm{End}(C^*)$ der zu $L_f \in \mathrm{End}C$ adjungierte.

Die nach 8.1. existierenden A-Modul-Strukturen auf $A^* = C^{**}$ sind demnach

8.2.2. $\lambda' = R''$ und $\rho' = L''$.

Ist insbesondere C als R-Modul endlich-erzeugt projektiv, so erhält man L und R aus der R-Algebra-Struktur von C*=A zurück.

8.2.3.DEF.: Ein R-Modul M "separiert Punkte" :$\Leftrightarrow \forall 0 \neq x \in M \ \exists f \in M^*: f(x) \neq 0$

Bsp.: - R Körper $\Longrightarrow$Jeder R-Modul separiert Punkte.

- M projektiv mit Dualbasis $\{e_i,f_i\}_{i\in I}$ $\Longrightarrow$

$0\neq x = \sum_{i\in I} e_i f_i(x) \Longrightarrow \exists i\in I: f_i(x)\neq 0$.

8.2.4.SATZ: (vgl. [Hei/Swe 69]2.4.3.)

Separiert die R-Cogebra C Punkte, so ist

$L(C^*) = \{T\in EndC \mid [T,R_f]=0 \ \forall f\in C^*\} =: (EndC)^{R(C^*)}$.

BEW.: a) Sei ε_C Coeins, $T\in(EndC)^{R(C^*)}$ bel., $g:=\varepsilon_C\circ T\in C^*$, dann gilt für alle $f\in C^*$ und $c\in C$: $\langle f|L_g(c)\rangle \underset{8.2.1.}{=} \langle \rho_g(f)|c\rangle =$

$=\langle f\circ g|c\rangle = \langle \lambda_f(g)|c\rangle \underset{8.2.1.}{=} \langle g|R_f(c)\rangle =$

$=\langle \varepsilon_C|T\circ R_f(c)\rangle = \langle \varepsilon_C|R_f\circ T(c)\rangle \underset{8.2.1.}{=} \langle \lambda_f(\varepsilon_C)|T(c)\rangle = \langle f|T(c)\rangle$, da

ε_C Einselement von C* ist. Also: $\forall c\in C$: $T(c)=L_g(c) \Longrightarrow T=L_g$.

b) $L_f\circ R_g = L_f\circ(g\underline{\otimes}id_C)\circ\Delta_C = (g\underline{\otimes}id_C\underline{\otimes}f)\circ\Delta_C^2$

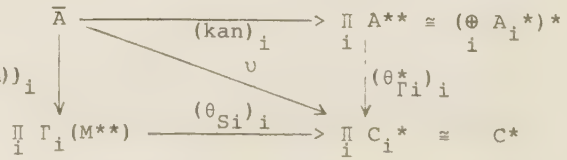
$R_g\circ L_f = R_g\circ(id_C\underline{\otimes}f)\circ\Delta_C = (g\underline{\otimes}id_C\underline{\otimes}f)\circ\Delta_C^2$. ■

8.2.5.KOR.: C kokommutative Cogebra, C separiert Punkte

$L(C^*) = R(C^*)$ ist maximale kommutative Subalgebra von EndC.

8.3. Betrachte jetzt speziell $A:=\Gamma(M)$ und $C:=S(M^*)$! Sind $A_i:=\Gamma_i(M)$ und $C_i:=S_i(M^*)$, dann ist $\bar{A}:=\prod_i A_i$ R-Algebra. Das folgende nach 7.2.(D_6) kommutative Diagramm liefert einen kanonischen R-Algebra-Hom. (1.3.2.) bezeichnet mit $\upsilon: \bar{A} \longrightarrow C^*$.

(D_1)



Bezeichnet $\overline{\lambda}$ die Linksmultiplikation auf $\overline{A}$, so sei $\overline{\lambda}' : \overline{A} \longrightarrow \mathrm{End}(\overline{A}^*)$ definiert wie in 8.1. und $R'' : C^* \longrightarrow \mathrm{End}(C^{**})$ wie in 8.2., d.s.h.: R_f'' ist der adjungierte Operator zum adjungierten Operator von R_f . (Beachte: i.A. $\overline{A} \neq C^*$)

8.3.1.LEMMA: Für $a \in \overline{A}$ kommutiert das folgende Diagramm:

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} C^{**} & \xrightarrow{(R'_{\upsilon(a)})^*} & C^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle \upsilon^*} & & \downarrow{\scriptstyle \upsilon^*} \\ \overline{A}^* & \xrightarrow{\overline{\lambda}'_a} & \overline{A}^* \end{array}$$

BEW.: $(f \in C^{**},\ b \in \overline{A})$ $\quad x := \upsilon^* \circ R''_{\upsilon(a)}(f)(b) = R''_{\upsilon(a)}(f)(\upsilon(b))$

$= f(R''_{\upsilon(a)}(\upsilon(b))) \underset{8.2.1.}{=} f(\lambda_{\upsilon(a)}(\upsilon(b))) = f(\upsilon(a)\upsilon(b)) = f(\upsilon(ab))$,

da υ R-Algebra-Hom. ist.

$\overline{\lambda}'_a \circ \upsilon^*(f)(b) = \upsilon^*(f)(\overline{\lambda}_a(b)) = \upsilon^*(f)(ab) = f(\upsilon(ab))$ ■

Damit kommutiert nun auch für alle $a \in \overline{A}$ das Diagramm:

(D_3)

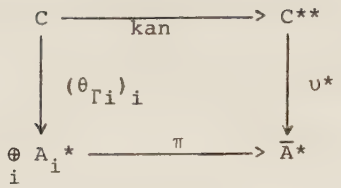
$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow[\text{kan}]{} & C^{**} & \xrightarrow{\upsilon^*} & \overline{A}^* \\ \downarrow{\scriptstyle R_{\upsilon(a)}} & & \downarrow{\scriptstyle R''_{\upsilon(a)}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\lambda}'_a} \\ C & \xrightarrow[\text{kan}]{} & C^{**} & \xrightarrow{\upsilon^*} & \overline{A}^* \end{array}$$

$\pi_i : \overline{A} \longrightarrow A_i$ sei die kan. Projektion.

$\pi : \bigoplus_i A_i^* \longrightarrow \overline{A}^*$ sei definiert durch $\pi := \sum_i \pi_i^*$. π ist Monomorphismus.

8.3.2.LEMMA: Das folgende Diagramm kommutiert:

(D_4)



BEW.: Sei $c\in C$ und $a\in\overline{A}$, dann gilt: $\upsilon^*\circ kan(c)(a)=kan(c)(\upsilon(a))=$

$=\upsilon(a)(c) \underset{(D_2)}{=} (\theta^*_{\Gamma i})_i\circ(kan)_i(a)(c)= (kan)_i(a)(\sum_i \theta_{\Gamma i}(c)) =$

$= \sum_i \theta_{\Gamma i}(c)(\pi_i(a))$. Andererseits ist $\pi\,(\theta_{\Gamma i})_i(c)(a) =$

$= \sum_i \pi_i^*(\theta_{\Gamma i}(c))(a) = \sum_i \theta_{\Gamma i}(c)(\pi_i(a))$. ■

8.3.3. $\forall a\in\overline{A}: \overline{\lambda}'_a(\pi(\oplus_i A_i^*)) \subset \pi(\oplus_i A_i^*)$

BEW.: Für $f_i\in A_i^*$ und $b\in\overline{A}$ gilt: $\overline{\lambda}'_a(\pi(f_i))(b)=\pi(f_i)(\overline{\lambda}_a(b))=$

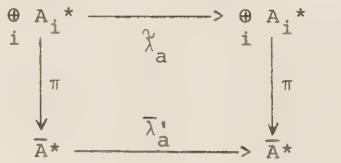
$=\pi(f_i)(ab)=\pi_i^*(f_i)(ab)=f_i(\pi_i(ab))=f_i(\sum_{r+s=i}\pi_r(a)\pi_s(b))=$

$= \sum_s f_i\circ\lambda_{\pi_{i-s}(a)}\circ\pi_s(b) = \sum_s \pi_s^*(f_i\circ\lambda_{\pi_{i-s}(a)})(b) =$

$= \pi(\sum_{s\leq i} f_i\circ\lambda_{\pi_{i-s}(a)})(b)$ ■

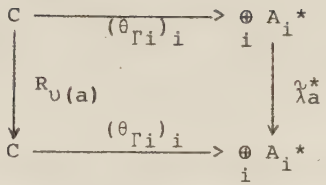
Demnach existiert $\mathfrak{X}'_a$ so, daß (D_5) kommutiert.

(D_5)



Wegen (D_3) und 8.3.2. kommutiert dann auch (D_6) für alle $a\in\overline{A}$.

(D_6)



8.3.4.LEMMA: Ist R ein unendlicher Körper und M ein endl.-dimensionaler R-Vektorraum, so gilt für $c \in S(M^*)$:

$c = 0 \iff \forall_{m \in M}: \upsilon((m^{[i]})_i)(c) = 0$.

BEW.: $\upsilon((m^{[i]})_i)(c) = (\theta_{\Gamma i}{}^*)_i \circ (kan)_i((m^{[i]})_i)(c) =$

$= (kan)_i((m^{[i]})_i)(\sum_i \theta_{\Gamma i}(\pi_i(c))) = \sum_i \theta_{\Gamma i}(\pi_i(c))(m^{[i]})$

$\theta_{\Gamma i}(\pi_i(c)) \in \Gamma_i(M)^*$. Da $\theta_{\Gamma i}$ Isomorphismus ist folgt die Behauptung aus 7.2.11.. ■

8.3.5.SATZ: Ist R ein unendlicher Körper und M ein endl.-dimensionaler R-Vektorraum, so ist

$L(S(M^*)^*) = (\ End(S(M^*))\ )^{\{R_\upsilon((m^{[i]})_i) \mid m \in M\}}$.

BEW.: Für $T \in End(S(M^*))$ mit der Eigenschaft, $T \circ R_\upsilon((m^{[i]})_i) = R_\upsilon((m^{[i]})_i) \circ T \quad \forall m \in M$, zeigt man analog zu 8.2.4. :

$\forall_{c \in S(M^*)}: \langle \upsilon((m^{[i]})_i) \mid T(c) \rangle = \langle \upsilon((m^{[i]})_i) \mid L_g(c) \rangle \quad \forall m \in M.$

Die Behauptung folgt dann aus 8.3.4.. ■

Ist $M = \bigoplus_{i \in \underline{n}} Re_i$ und ist für $j \in \underline{n}$ $f_j \in M^*$ mit $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, so wird durch $X_i \longmapsto f_i \quad \forall i \in \underline{n}$ ein Isomorphismus von $R[X_i]_{i \in \underline{n}}$ auf $S(M^*)$ definiert. Nach Identifikation gilt dann für $m = \sum_i \alpha_i e_i \in M$:

$$R_{\upsilon((m^{[i]})_i)}(X_j^k) = R_{\upsilon((m^{[i]})_i)}(f_j^{\vee k}) = (\mu\circ S_i(m))_i * id_{S(M^*)}(f_j^{\vee k}) =$$

$$= \sum_{i\in\underline{k}_o} \binom{k}{i} f_j(m)^i f_j^{\vee k-i} = \sum_{i\in\underline{k}_o} \binom{k}{i} \alpha_j{}^i X_j^{k-i} = (\alpha_j + X_j)^k .$$

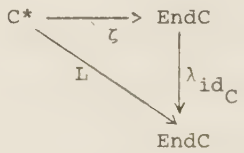
8.3.6.BEM.: Für M:=R entspricht Satz 8.3.5. gerade Prop.7.2 in [Rom/Rot 78], d.h.: $L(S(M^*)^*)$ ist gerade die Algebra der Shift-invarianten Operatoren, wobei die Shift-Operatoren gerade die $R_{\upsilon((m^{[i]})_i)}$ sind.

8.4. C sei jetzt eine R-Bigebra. Dann ist EndC mit der Convolution (μ_{EndC}) eine (nicht notwendig kommutative) R-Algebra.

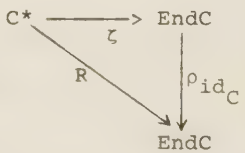
ζ: C* ——> EndC sei definiert durch $\forall f\in C^*$: $f \mapsto (c \mapsto f(c)1_C)$. ζ ist R-Modul-Homomorphismus. Ist C als R-Modul treu, so ist ζ Einbettung.

Definiert man L und R für die Cogebra C wie in 8.2., so gilt für $f\in C^*$: $L_f = id_C * \zeta(f)$ und $R_f = \zeta(f) * id_C$. Es kommutieren also folgende Diagramme:

(D_7)



(D_8)



Dabei ist λ_{id_C} die Links- und ρ_{id_C} die Rechtsmultiplikation mit id_C in der Algebra EndC mit Convolution.

Beachte: Das Einselement bzgl "*" ist nicht id_C, sondern $\eta_C\circ\varepsilon_C$ (ε_C Coeins, η_C Eins).

Im Folgenden soll nur noch die "Links"-Variante weiter betrachtet werden.

8.4.1.DEF.: Für eine R-Bigebra C sei $\underline{\underline{Sh}}:=\underline{\underline{Sh}}_C\in End(EndC)$ definiert als $Sh_C:=\lambda_{id_C}$. Die Abkürzung "Sh" steht für "Shift", da es sich um eine Verschiebung oder Translation(multiplikativ) um id_C handelt.

Sei $C=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} C_i$ graduierte Bigebra, also $\Delta_C(C_k)\subset \sum_{i+j=k} C_i\otimes C_j$ und $\mu(C_i\otimes C_j)\subset C_{i+j}$.

8.4.2.LEMMA: 1) $Sh(EndgrC)\subset EndgrC$; 2) $Sh(\prod_{i\in\mathbb{N}_o} EndC_i)\subset \prod_{i\in\mathbb{N}_o} EndC_i$.

8.4.3.BEM.: Es gilt nicht $Sh(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} EndC_i)\subset \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} EndC_i$.

BEW. von 8.4.2.: 1) $f\in EndgrC \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ \forall i\in\mathbb{N}_o : f(C_i)\subset C_{i+k}$.

$id_C*f(C_i)\subset \sum_{r+s=i} id_C(C_r)f(C_s)\subset \sum_{r+s=i} C_rC_{s+k}\subset C_{i+k}$.

2) Sei $f_i\in EndC_i$. $id_C*(f_i)_i(C_k)\subset \sum_{r+s=k} id_C(C_r)(f_i)_i(C_s) =$

$= \sum_{r+s=k} C_rf_s(C_s)\subset \sum_{r+s=k} C_rC_s\subset C_k \Longrightarrow id_C*(f_i)_i=(id_C*(f_i)_i\big|_{C_k,C_k})_k$. ■

Die folgenden Aussagen umfassen insbesondere die Funktoren Γ, S, Λ und die kanonischen Abbildungen β_Γ und β_S sowie das später definierte(Kap.17) β_Λ(an Stelle von F_G).

8.4.4.LEMMA: G:R-MOD $\longrightarrow$ R-BIGGR sei ein Funktor. Für $M\in$R-MOD sei $\underline{\underline{G_i}}(M):=G(M)_i$. $F_G:\Gamma(EndM)\longrightarrow End(G(M)))$ sei ein R-Modul-Hom. mit folgenden Eigenschaften:

a) Bezüglich der Convolutionsstruktur auf End(G(M)) ist F_G R-Algebra-Homomorphismus.

b) $\forall i\in\mathbb{N}_o$: $F_G(\Gamma_i(EndM))\subset End(G_i(M))$

c) $\forall i\in\mathbb{N}_o$: $F_{Gi}:=F_G\big|_{\Gamma_i(EndM),End(G_i(M))}$ ist R-Algebra-Hom.

von $(\Gamma_i(\mathrm{End}M),\tau)$ nach $(\mathrm{End}(G_i(M)),\circ)$.

Dann kommutiert folgendes Diagramm in R-MOD:

(D_9)

$$\begin{array}{ccc} \prod_i \Gamma_i(\mathrm{End}M) & \xrightarrow{\lambda_{((id_M^{[i]})_i)}} & \prod_j \Gamma_j(\mathrm{End}M) \\ \downarrow (F_{Gi})_i & & \downarrow (F_{Gj})_j \\ \prod_i \mathrm{End}(G_i(M)) & \xrightarrow{Sh_{G(M)}} & \prod_j \mathrm{End}(G_j(M)) \end{array}$$

BEW.: Für $i\in\mathbb{N}_0$ sei $x_i\in\Gamma_i(\mathrm{End}M)$ und $y_1\in G_1(M)$.

$$(F_{Gj})_j\circ\lambda_{((id_M^{[i]})_i)}((x_i)_i)\ (y_1) = (F_{Gk}(\sum_{i+j=k} id_M^{[i]}x_j))_k\ (y_1) \quad \overset{a}{=} \overset{b}{=}$$

$$= \sum_{i+j=1}(F_{Gi}(id_M^{[i]})*F_{Gj}(x_j))\ (y_1) =$$

$$= \sum_{i+j=1}\ \sum_{(y_1)} F_{Gi}(id_M^{[i]})(y_{1(1)})\ F_{Gj}(x_j)(y_{1(2)}) \quad \overset{c}{=}$$

$$= \sum_{i+j=1}\ \sum_{(y_1)} y_{1(1)}\ F_{Gj}(x_j)(y_{1(2)}) \ .$$ Andererseits gilt:

$$(Sh_{G(M)}\circ(F_{Gi})_i\ ((x_j)_j))\ (y_1) = id_{G(M)}*(F_{Gi}(x_i))_i(y_1) =$$

$$= \sum_{i+j=1}\ \sum_{(y_1)} y_{1(1)}\ F_{Gj}(x_j)(Y_{1(2)}). \ \blacksquare$$

8.4.5.LEMMA: Ist A R-Algebra, M R-Modul und ω:A $\to$EndM ein R-Algebra-Hom., so kommutiert folgendes Diagramm in R-MOD:

(D_{10})

$$\begin{array}{ccc} \prod_i \Gamma_i(A) & \xrightarrow{\lambda_{(1_A^{[i]})_i}} & \prod_j \Gamma_j(A) \\ \downarrow (\Gamma_i(\omega))_i & & \downarrow (\Gamma_j(\omega))_j \\ \prod_i \Gamma_i(\mathrm{End}M) & \xrightarrow{\lambda_{(id_M^{[i]})_i}} & \prod_j \Gamma_j(\mathrm{End}M) \end{array}$$

BEW.: Klar, da $(\Gamma_i(\omega))_i$ R-Algebra-Hom. ist und $\omega(1_A)=id_M$. ■

8.4.6.BEM.: Beim Beweis von 8.4.5. bemerkt man, daß man

EndM durch eine beliebige R-Algebra B ersetzen kann, id_M natürlich durch 1_B ersetzen muß, und daß dann das resultierende Diagramm ebenfalls kommutiert.

8.4.7.DEF.: Für eine R-Algebra A bezeichne

Sh: $\prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A) \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A)$ den R-Modul-Homomorphismus

$Sh := \lambda_{(1_A^{[i]})_i}$.

Diese Abbildung soll später noch genauer untersucht werden; zunächst sollen die beiden letzten Lemmata noch abgerundet werden.

8.4.8.KOR. zu 8.4.4. u. 8.4.5.: Ist A eine R-Algebra und M ein Links-A-Algebra-Modul mit zugehörigem R-Algebra-Hom. $\omega: A \longrightarrow \mathrm{End}M$, und sind weiter G und F wie in 8.4.4., so kommutiert das folgende Diagramm:

(D_{11})

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A) & \xrightarrow{Sh} & \prod_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A) \\ \downarrow (F_{Gi}\circ\Gamma_i(\omega))_i & & \downarrow (F_{Gj}\circ\Gamma_j(\omega))_j \\ \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \mathrm{End}(G_i(M)) & \xrightarrow{Sh_{G(M)}} & \prod_{j\in\mathbb{N}_o} \mathrm{End}(G_j(M)) \end{array}$$

■

8.4.9.BEM.: $(F_{Gi}\circ\Gamma_i(\omega))_i$ ist R-Algebra-Hom. in zweifacher Hinsicht: a) $\prod_i \Gamma_i(A)$ trage die Struktur der erweiterten Algebra der dividierten Potenzen und $\prod_i \mathrm{End}(G_i(M))$ sei betrachtet als Subalgebra von $(\mathrm{End}(G(M)),*)$.

b) $\prod_i \Gamma_i(A)$ trage die von A herrührende Algebra-

Struktur (vgl. nach 3.1.12.) und $\prod_i \mathrm{End}(G_i(M))$ sei betrachtet als Subalgebra von $(\mathrm{End}(G(M)),\circ)$.

Für die spätere Anwendung werden noch zwei weitere Lemmata benötigt.

8.4.10.LEMMA: Ist A R-Algebra und liefert $\lambda: A \longrightarrow \mathrm{End}A$ die Links-Struktur von A, dann ist $(\beta_{\Gamma_i} \circ \Gamma_i(\lambda))_i$ von $\prod_i \Gamma_i(A)$ nach $\prod_i \mathrm{End}(\Gamma_i(A))$ ein Monomorphismus.

BEW.: Jedes Element aus $\Gamma_k(A)$ läßt sich schreiben als $x := \sum_\alpha c_\alpha \prod_i a_i^{[\alpha_i]}$ mit $a_i \in A$, $c_\alpha \in R$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_i \alpha_i < \infty$ geeignet.

Es sei $0 \neq x \in \Gamma_k(A)$. $\beta_{\Gamma k} \circ \Gamma_k(\lambda)(x) = \sum_\alpha c_\alpha \beta_{\Gamma k}(\prod_i \lambda_{a_i}^{[\alpha_i]}) =$

$= \sum_\alpha c_\alpha \prod_i \Gamma_{\alpha_i}(\lambda_{a_i})$. $\sum_\alpha c_\alpha \prod_i \Gamma_{\alpha_i}(\lambda_{a_i})(1_A^{[k]}) =$

$= \sum_\alpha c_\alpha \prod_i \lambda_{a_i}(1_A)^{[\alpha_i]} = \sum_\alpha c_\alpha \prod_i a_i^{[\alpha_i]} \neq 0$. ■

8.4.11.LEMMA: Ist A R-Algebra, λ wie in 8.4.10.,und ist A endl.-dimensionaler freier R-Modul, dann ist $(\beta_{Si} \circ \Gamma_i(\lambda))_i$ von $\prod_i \Gamma_i(A)$ nach $\prod_i \mathrm{End}(S_i(A))$ ein Monomorphismus.

BEW.: $\{e_i\}_{i \in \underline{n}}$ sei eine Basis von A. $0 \neq \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha \prod_{i \in \underline{n}} e_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A)$

$\Rightarrow \beta_{Sk} \circ \Gamma_k(\lambda)(\sum_{|\alpha|=k} r_\alpha \prod_{i \in \underline{n}} e_i^{[\alpha_i]}) = \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha \prod_{i \in \underline{n}} S_{\alpha_i}(\lambda_{e_i}) =: H.$

$H(1_A^{\vee k}) = \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha \bigvee_{i \in \underline{n}} e_i^{\vee \alpha_i} \neq 0$, da $\{\bigvee_{i \in \underline{n}} e_i^{\vee \alpha_i}\}_{|\alpha|=k}$ Basis von $S_k(A)$ ist (vgl. 7.2.5.). ■

Jetzt soll für eine R-Algebra A die Abbildung

$Sh: \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A) \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A)$ genauer betrachtet werden. Da $\Gamma(A)$ kommutativ und cokommutativ ist, kann man sich Sh ebensogut als Links- wie als Rechtsmultiplikation mit $(1_A^{[i]})_i$ vorstellen.

$\forall x_i\in\Gamma_i(A)$: $Sh((x_i)_i) = (\sum_{j\leq l} x_j 1_A^{[l-j]})_{l\in\mathbb{N}_o}$; speziell:

$Sh(x_i) = (x_i 1_A^{[l-i]})_{l\in\mathbb{N}_o} = (x_i 1_A^{[k]})_{k\in\mathbb{N}_o} \in \prod_{j\geq i} \Gamma_j(A)$.

8.4.12.LEMMA: Sh ist Monomorphismus.

BEW.: $x_i\in\Gamma_i(A)$ $\forall i\in\mathbb{N}_o$ mit $(x_i)_i\neq 0 \Rightarrow k:=\min\{i \mid x_i\neq 0\}\in\mathbb{N}_o$.

$\pi_k(Sh((x_i)_i)) = \sum_{j\leq k} x_j 1_A^{[k-j]} = x_k \neq 0$. ■

8.4.13.DEF.: $\hat{\Gamma}(A) := Sh(\Gamma(A)) \subset \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A)$.

8.4.14. $\hat{\Gamma}(A) \cong \Gamma(A)$ (nach Def. und 8.4.12.)

$Sh\big|_{\Gamma(A),\hat{\Gamma}(A)}$ werde wieder mit Sh bezeichnet.

Wegen $\Gamma(A) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A)$ sind also $\Gamma(A)$ und $\hat{\Gamma}(A)$ zwei verschiedene, aber zueinander isomorphe, Untermoduln von $\prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(A)$.

Bezeichnet $\lambda: A \longrightarrow \mathrm{End}A$ wieder die Linksstruktur auf A, so gilt nach 8.4.8. und 8.4.10.:

8.4.15. $\hat{\Gamma}(A) \cong Sh_{\Gamma(A)} \circ \beta_\Gamma \circ \Gamma(\lambda)(\Gamma(A)) \subset \prod_i \mathrm{End}(\Gamma_i(A)) \subset \mathrm{End}(\Gamma(A))$.

8.4.16.LEMMA: Ist $\pi_k: \prod_i \Gamma_i(A) \longrightarrow \Gamma_k(A)$ die kan. Projektion, so gilt: a) $\forall k\in\mathbb{N}_o$: $Sh(\Gamma_k(A))$ ist direkter Summand von $\Gamma(A)$.

b) $\pi_k \circ Sh\Big|_{\Gamma_k(A)} = id_{\Gamma_k(A)}$.

BEW.: Es reicht b) zu zeigen. Für $x_k \in \Gamma_k(A)$ ist $\pi_k \circ Sh(x_k) =$
$= \pi_k((\sum_{j \leq 1} x_j 1_A^{[1-j]})_1) = \pi_k((x_k 1_A^{[1-k]})_1) = x_k 1_A^{[k-k]} = x_k$. ■

8.4.17. $\hat{\Gamma}(A) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_o} Sh(\Gamma_i(A))$.

8.4.18.DEF.: $\hat{\Gamma}_i(A) := Sh(\Gamma_i(A))$.

KAPITEL 9 : Die Algebra $\hat{\Gamma}(A)$; Eigenschaften, multiplikative Struktur und spezielle Basen.

Ebenso wie $\Gamma(A)$ liegt der im vorigen Kapitel definierte, zu $\Gamma(A)$ isomorphe, Modul $\hat{\Gamma}(A)$ in $\Pi\Gamma_i(A)$. Während $\Gamma(A)$ keine Subalgebra von $(\Pi\ \Gamma_i(A), \tau)$ ist, ist dies jedoch für $\hat{\Gamma}(A)$ der Fall. Es wird sich zeigen, daß $\hat{\Gamma}(A)$ eine aufsteigende Filtrierung trägt, so daß $gr(\hat{\Gamma}(A))$ als R-Algebra isomorph ist zu $\Gamma(A)$.
Neben den Basen, die man für freies A über die Isomorphie zu $\Gamma(A)$ bekommt, kann man für $\hat{\Gamma}(A)$ weitere, der multiplikativen Struktur angepaßte, Basen angeben, die in Kap. 22 wichtig werden. Dazu ist eine eingehendere Betrachtung der Multiplikation auf $\hat{\Gamma}(A)$ nötig.

9.1.

9.1.1.SATZ: $\hat{\Gamma}(A)$ ist R-Subalgebra von $(\prod_{i \in \mathbb{N}_o} \Gamma_i(A), \tau) =$
$= (\prod_{i \in \mathbb{N}_o} (\Gamma_i(A), \tau))$.

Der Satz folgt sofort aus der Formel 9.1.3. für die Multiplikation in $(\prod \Gamma_i(A),\tau)$. Doch vorher noch eine Def.:

9.1.2.DEF.: Für eine Indexmenge I und Elemente $a_i \in A$ $(\forall i \in I)$ sowie $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $(\forall i \in I)$ mit $|\alpha| = \sum_{i\in I} \alpha_i < \infty$ sei

$\prod_{i\in I} a_i^{\langle\alpha_i\rangle} := Sh(\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})$. Umgekehrt soll diese Schreibweise implizieren, daß $|\alpha| < \infty$ ist.

9.1.3. $$\prod_{i\in I} a_i^{\langle\alpha_i\rangle} \tau \prod_{j\in J} b_j^{\langle\beta_j\rangle} =$$

$$= \sum_{(\zeta_{ij})} \prod_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j^{\langle\zeta_{ij}\rangle} \prod_{i\in I} a_i^{\langle\zeta_{i0}\rangle} \prod_{j\in J} b_j^{\langle\zeta_{0j}\rangle} \cdot$$

Dabei sind I und J Indexmengen, $a=(a_i)\in A^I$, $b=(b_j)\in A^J$ und $\alpha=(\alpha_i)\in \mathbb{N}_0^{(I)}$, $\beta=(\beta_j)\in \mathbb{N}_0^{(J)}$. Die Summation läuft über die Menge $\hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})$, die wie folgt definiert ist:

9.1.4.DEF.: $\hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J}) :=$

$$= \{(\zeta_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o} - 0 \mid \forall i\in I: \sum_{j\in J_o} \zeta_{ij} = \alpha_i ; \forall j\in J: \sum_{i\in I_o} \zeta_{ij} = \beta_j\}.$$

Modifikationen dieser Schreibweise treten auf.

BEW. von 9.1.3. und damit, wegen $Sh(1_R) = 1_{\prod \Gamma_i(A)}$, von 9.1.1.

$$\prod_{i\in I} a_i^{\langle\alpha_i\rangle} \tau \prod_{j\in J} b_j^{\langle\beta_j\rangle} =$$

$$= (\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]} 1_A^{[k-|\alpha|]} \tau \prod_{j\in J} b_j^{[\beta_j]} 1_A^{[k-|\beta|]})_{k\in\mathbb{N}_0}.$$ Setze $a_0 := 1_A = b_0$ und für festes $k\in\mathbb{N}_0$ definiere $\alpha_0 := k-|\alpha|$ und $\beta_0 := k-|\beta|$. Damit wird:

$$\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}\, 1_A^{[k-|\alpha|]} \;\tau\; \prod_{j\in J} b_j^{[\beta_j]}\, 1_A^{[k-|\beta|]} = \prod_{i\in I_o} a_i^{[\alpha_i]} \;\tau\; \prod_{j\in J_o} b_j^{[\beta_j]} \overset{3.1.5.}{=}$$

$$= \sum_{(\zeta_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o} \in M((\alpha_i)_{i\in I_o};(\beta_j)_{j\in J_o})} \prod_{(i,j)\in I_o\times J_o} a_i b_j^{[\zeta_{ij}]} = :X_k \,.$$

Ist $(\zeta_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o} \in M((\alpha_i)_{i\in I_o};(\beta_j)_{j\in J_o})$ so gilt:

1) $\forall i\in I$: $\sum_{j\in J_o} \zeta_{ij} = \alpha_i$; 2) $\forall j\in J$: $\sum_{i\in I_o} \zeta_{ij} = \beta_j$;

3) $\sum_{j\in J_o} \zeta_{0j} = \alpha_0 = k-|\alpha|$; 4) $\sum_{i\in I_o} \zeta_{i0} = \beta_0 = k-|\beta|$.

3) $\Longrightarrow \zeta_{00} = k-(|\alpha| + \sum_{j\in J} \zeta_{0j}) = k-(\sum_{i\in I} \alpha_i + \sum_{j\in J} \zeta_{0j}) \overset{1)}{=}$

$= k-(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_o} \zeta_{ij} + \sum_{j\in J} \zeta_{0j}) = k-(\sum_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \zeta_{ij})$.

ζ_{00} ist also durch die ζ_{ij} mit $(i,j)\in I_o\times J_o-0$ bereits bestimmt. Hat man andererseits ein Element $(\zeta_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o-0}$ aus $\hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})$ und definiert $\zeta_{00} := k-(\sum_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \zeta_{ij})$, so gilt:

$$\sum_{j\in J_o} \zeta_{0j} = \sum_{j\in J} \zeta_{0j} + (k- \sum_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \zeta_{ij}) = k+ \sum_{j\in J} \zeta_{0j} - \sum_{j\in J} \zeta_{0j} -$$

$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_o} \zeta_{ij} = k- \sum_{i\in I} \alpha_i = k-|\alpha|$. Analog zeigt man 4).

Berücksichtigt man jetzt noch die Def. von a_0 und b_0 , so erhält man damit:

$$X_k = \sum_{(\zeta_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \in \hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} X_{\zeta k} \qquad \text{mit}$$

$$X_{\zeta k} := \prod_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j^{[\zeta_{ij}]} \prod_{i\in I} a_i^{[\zeta_{i0}]} \prod_{j\in J} b_j^{[\zeta_{0j}]}\, 1_A^{\left[k-\sum_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \zeta_{ij}\right]}$$

$$(X_k)_k = \sum_{(\zeta_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \in \hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} (X_{\zeta k})_k$$

$$(X_{\zeta k})_k = \prod_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j^{<\zeta_{ij}>} \prod_{i\in I} a_i^{<\zeta_{i0}>} \prod_{j\in J} b_j^{<\zeta_{0j}>} . \quad \blacksquare$$

9.1.5.DEF.: Für eine R-Algebra A bezeichne $\hat{\Gamma}(A)$ im Folgenden stets die Algebra $(\hat{\Gamma}(A),\tau)$, Subalgebra von $(\Pi\Gamma_i(A),\tau)$.

9.1.6.BEM.: 1) Man kann 9.1.3. wegen der Isomorphie von Sh auch als Definition einer zweiten Multiplikation auf $\Gamma(A)\subset TS(A)$ (vgl.6.1.) verstehen. Auf TS(A) wurde in [New/Rad 79] über Körpern ebenfalls eine zweite Multiplikation eingeführt, und man kann zeigen, daß diese die durch 9.1.3. gegebene Multiplikation fortsetzt.

2) $\hat{\Gamma}(A)$ ist zwar direkte Summe der $\hat{\Gamma}_i(A)$, ist jedoch als R-Algebra dadurch nicht graduiert.

3) $Sh:\Gamma(A)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A)$ ist kein R-Algebra-Hom., ebensowenig $Sh:(\Gamma_k(A),\tau)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A)$, wenn $k>0$ ist.

4) $Sh:R\cong(\Gamma_0(A),\tau)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A)$ ist R-Algebra-Hom. und zwar die Eins von $\hat{\Gamma}(A)$. Insbesondere hat damit (Sh inj.!) $\hat{\Gamma}(A)$ die gleiche Charakteristik wie R.

9.1.7.KOR.: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ ist $\pi_k:\hat{\Gamma}(A)\longrightarrow(\Gamma_k(A),\tau)$ ein R-Algebra-Epimorphismus.

BEW.: Daß π_k R-Algebra-Hom. ist folgt aus 9.1.1., der Rest aus 8.4.16.b). ■

Sind A und B R-Algebren und ist $\psi:A\longrightarrow B$ R-Modul-Hom., dann hat man einen R-Modul-Hom. $Sh\circ\Gamma(\psi)\circ Sh^{-1}:\hat{\Gamma}(A)\longrightarrow\hat{\Gamma}(B)$.

9.1.8.LEMMA: Für R-Algebren A und B und R-Modul-Homomorphismen $\psi:A\longrightarrow B$ mit $\psi(1_A)=1_B$ gilt:

a) $(\Gamma_i(\psi))_i(\hat{\Gamma}(A))\subset\hat{\Gamma}(B)$. Setze daher $\underline{\hat{\Gamma}(\psi)}:=(\Gamma_i(\psi))_i\big|_{\hat{\Gamma}(A),\hat{\Gamma}(B)}$.

b)
$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(A) & \xrightarrow{\quad Sh\,\Gamma(\psi)\,Sh^{-1}\quad} & \hat{\Gamma}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i \Gamma_i(A) & \xrightarrow{\quad (\Gamma_i(\psi))_i\quad} & \prod_i \Gamma_i(B) \end{array}$$
kommutiert.

c) Ist ψ R-Algebra-Hom., so ist $Sh\circ\Gamma(\psi)\circ Sh^{-1}$ R-Algebra-Hom..

BEW.: a) folgt sofort aus b); c) ergibt sich aus b), da nach 3.1.8. $(\Gamma_i(\psi))_i$ R-Algebra-Hom. ist.

b): $x_j\in\Gamma_j(A) \Longrightarrow (\Gamma_i(\psi))_i(Sh(x_j)) = (\Gamma_i(\psi)(x_j 1_A^{[i-j]})_i =$

$=(\Gamma_j(\psi)(x_j)\Gamma_{i-j}(\psi)(1_A^{[i-j]}))_i = (\Gamma_j(\psi)(x_j)1_B^{[i-j]})_i =$

$=Sh\circ\Gamma(\psi)\circ Sh^{-1}(Sh(x_j))$. ■

9.1.9. $\hat{\Gamma}$ ist Funktor von R-ALG nach R-ALG mit

$\hat{\Gamma}(f) := Sh\circ\Gamma(f)\circ Sh^{-1} = (\Gamma_i(f))_i\big|_{\hat{\Gamma},\hat{\Gamma}}$, für f Morph. in R-ALG.

9.1.10.DEF.: Durch die R-Moduln $\hat{\Gamma}(A)_m := \bigoplus_{0\le i\le m} \hat{\Gamma}_i(A)$ $\forall m\in\mathbb{N}_o$ ($\hat{\Gamma}(A)_{-1}:=0$) wird eine aufsteigende Filtrierung auf $\hat{\Gamma}(A)$ definiert.

9.1.11. $\hat{\Gamma}(A)_m \tau \hat{\Gamma}(A)_n \subset \hat{\Gamma}(A)_{m+n}$.

Dies ergibt sich wegen $\sum_{(i,j)\in I\times J}\zeta_{ij} + \sum_{i\in I}\zeta_{i0} + \sum_{j\in J}\zeta_{0j} \le$

$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_o}\zeta_{ij} + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_o}\zeta_{ij} = \sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{j\in J}\beta_j$ aus 9.1.3..

Der zur filtrierten Algebra $\hat{\Gamma}(A)$ gehörige graduierte R-Modul $gr(\hat{\Gamma}(A)) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} \hat{\Gamma}(A)_i / \hat{\Gamma}(A)_{i-1}$ ist wegen 9.1.11. sogar R-Algebra.

9.1.12.SATZ: $gr(\hat{\Gamma}(A)) \cong \Gamma(A)$ als R-Algebra.

BEW.: Der Faktor von $\hat{\Gamma}(A)_i$ nach $\hat{\Gamma}(A)_{i-1}$ ist isomorph zu $\hat{\Gamma}_i(A) \cong \Gamma_i(A)$ als R-Modul. Für $x := \prod_{i\in I} x_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A)$ und $y := \prod_{j\in J} y_j^{[\beta_j]} \in \Gamma_l(A)$ ist $Sh(x)\tau Sh(y) \in \hat{\Gamma}(A)_{k+l}$ nach 9.1.11..

Betrachte 9.1.3. für dieses Produkt: $\sum_{(i,j)\in I\times J} \zeta_{ij} + \sum_{i\in I} \zeta_{i0} +$

$+ \sum_{j\in J} \zeta_{0j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_o} \zeta_{ij} + \sum_{j\in J} \zeta_{0j} = \sum_{i\in I} \alpha_i + \sum_{j\in J} \zeta_{0j} = k + \sum_{j\in J} \zeta_{0j}$.

Dies ist gleich k+l genau dann, wenn $\sum_{j\in J} \zeta_{0j} = l = \sum_{j\in J} \beta_j =$

$= \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_o} \zeta_{ij}$ ist, was wiederum äquivalent ist zu $0 =$

$= \sum_{(i,j)\in I\times J} \zeta_{ij}$. Dies heißt, daß alle $\zeta_{ij}=0$ sind, wenn (i,j) aus I×J ist. Also gilt: $Sh(x)\tau Sh(y) \equiv \prod_{i\in I} x_i^{\langle\alpha_i\rangle} \prod_{j\in J} y_j^{\langle\beta_j\rangle} \bmod \hat{\Gamma}(A)_{k+l-1}$. Dies ist gerade $Sh(xy)$.

Das Einselement in $gr(\hat{\Gamma}(A))$ ist 1_R. ■

Die $\hat{\Gamma}(A)_i$, welche die zunehmende Filtrierung auf $\hat{\Gamma}(A)$ bilden, sind offensichtlich keine Ideale. Allerdings ist wegen 9.1.11. die Filtrierung multiplikativ im Sinne von [Nor 68]. Es existiert jedoch eine für das Spätere wichtige Filtrierung durch Ideale, so daß $\hat{\Gamma}(A)$ zum filtrierten Ring im Sinne von [Nor 68] wird. Da jedoch ein Analogon zu 9.1.11. fehlt, ist diese Filtrierung nicht mehr multiplikativ.

9.1.13.LEMMA: $\forall i\in\mathbb{N}_o : \mathfrak{F}_i := \bigoplus_{j\geq i} \hat{\Gamma}_j(A)$ ist Ideal in $\hat{\Gamma}(A)$.

BEW.: Klar, da $\prod_{j\geq i} \Gamma_j(A)$ Ideal in $(\prod_{k\in\mathbb{N}_o} \Gamma_k(A), \tau)$ ist. ■

Die $\mathfrak{F}_i$ mit $i\in\mathbb{N}_0$ bilden die behauptete abnehmende Filtrierung auf $\hat{\Gamma}(A)$.

Sind A und B R-Algebren, so gibt es nach 3.1.13.(1.3.3.) einen R-Algebra-Hom. $\overline{\xi}$ von $(\prod_i \Gamma_i(A),\tau)\otimes(\prod_j \Gamma_j(B),\tau)$ nach $(\prod_k \Gamma_k(A\oplus B),\tau)$.

9.1.14. $\overline{\xi}(\hat{\Gamma}(A)\otimes\hat{\Gamma}(B))\subset\hat{\Gamma}(A\oplus B)$.

BEW.: $\overline{\xi}(a^{<r>}\otimes b^{<s>}) = \overline{\xi}((a^{[r]}1_A^{[i]})_i\otimes(b^{[s]}1_B^{[j]})_j) =$

$=(\sum_{r+i+s+j=k}(a,0)^{[r]}(1_A,0)^{[i]}(0,b)^{[s]}(0,1_B)^{[j]})_k =$

$=((a,0)^{[r]}(0,b)^{[s]}(\sum_{i+j=k-r-s}(1_A,0)^{[i]}(0,1_B)^{[j]}))_{k\geq r+s} =$

$=((a,0)^{[r]}(0,b)^{[s]}(1_A,1_B)^{[k-r-s]})_{k\geq r-s} = (a,0)^{<r>}(0,b)^{<s>}$ für alle $a\in A$ und $b\in B$. Da $\overline{\xi}$ R-Algebra-Hom. ist, reicht dies. ■

Genau wie im Beweis von 9.1.14. rechnet man nach:

$\overline{\xi}(\prod_i a_i^{<\alpha_i>}\otimes\prod_j b_j^{<\beta_j>}) = (\prod_i (a_i,0)^{<\alpha_i>})(\prod_j (0,b_j)^{<\beta_j>})$. Damit kommutiert daß folgende Diagramm:

(D)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma(A)\otimes\Gamma(B) & \xrightarrow[\xi(1.3.4.)]{} & \Gamma(A\oplus B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Gamma}(A)\otimes\hat{\Gamma}(B) & \xrightarrow{\overline{\xi}} & \hat{\Gamma}(A\oplus B) \end{array}$$
(Sh: linke Spalte $\Gamma\to\hat{\Gamma}$, rechte Spalte $\Gamma\to\hat{\Gamma}$)

9.1.15.SATZ: Die Einschränkung $\hat{\xi}:\hat{\Gamma}(A)\otimes\hat{\Gamma}(B)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A\oplus B)$ von $\overline{\xi}$ ist ein R-Algebra-Isomorphismus.

BEW.: Folgt aus (D), da alle anderen Abbildungen Iso. sind. ■

$\overline{\xi}$ ist natürliche Transformation, und so folgt mit der Funktoreigenschaft von $\hat{\Gamma}$, daß auch $\hat{\xi}$ natürliche Transformation ist.

9.2. Im Folgenden sollen einige Grundlagen gelegt werden für das "Rechnen" in $\hat{\Gamma}(A)$.

9.2.1.DEF.: I sei Indexmenge, $E:=\{a_i\}_{i\in I}$ A. Sage : "E ist S-Lin" bzgl. einer Teilmenge S von R, wenn für alle $i,j\in I$ das Element $a_i a_j$ S-Linearkombination von Elementen aus E ist.

9.2.2.BEISPIELE: 1)E Erzeugendensystem des R-Moduls A ==> E ist R-Lin.

2) E multiplikativ abgeschlossen ==> E ist {0,1}-Lin.

9.2.3.LEMMA: $E:=\{a_i\}_{i\in I}$ sei S-Lin für eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Für alle $r\in\mathbb{N}_0$ und $i_k\in I$ $(\forall k\in\underline{r+1})$ gilt:

$$a_{i_1}^{<\alpha_1>}\cdot\ldots\cdot a_{i_r}^{<\alpha_r>}\ \tau\ a_{i_{r+1}}^{<\alpha_{r+1}>} =$$

$$= a_{i_1}^{<\alpha_1>}\ldots a_{i_{r+1}}^{<\alpha_{r+1}>} + \text{S-Linearkombination von Elementen}$$

$$a_{j_1}^{<\beta_1>}\ldots a_{j_k}^{<\beta_k>} \quad \text{mit } k\in\mathbb{N},\ \beta_1\in\mathbb{N}_0,\ j_1\in I\ \ (\forall l\in\underline{k}) \text{ und}$$

$|\beta|<|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_{r+1}$, sowie

(A1) $\beta_i \leq \max\{\alpha_p \mid p\in\underline{r+1}\}\quad \forall i\in I$ und

(A2) $\min\{\beta_i\neq 0 \mid i\in\underline{k}\} \leq \min\{\alpha_j\neq 0 \mid j\in\underline{r+1}\}$.

Ist S sogar Unterring von R, so kann man an Stelle von (A1) und (A2) auch annehmen: (A3) $a_{j_p}\neq a_{j_q}\ \forall p,q\in\underline{k}$ mit $p\neq q$.

BEW.: $a_{i_1}^{\langle\alpha_1\rangle} \ldots a_{i_r}^{\langle\alpha_r\rangle} \tau\, a_{i_{r+1}}^{\langle\alpha_{r+1}\rangle} \overset{9.1.3.}{=}$

$= \overline{\sum_{(\zeta_{ki})}} \prod_{k\in\underline{r}} a_{i_k}^{\langle\zeta_{k1}\rangle} a_{i_{r+1}}^{\langle\zeta_{k0}\rangle} \prod_{k\in\underline{r}} a_{i_k}^{\langle\zeta_{01}\rangle} a_{i_{r+1}}$, wobei die Summe über alle $(\zeta_{ki})_{(k,i)\in\underline{r}_o\times\underline{1}_o}$ läuft mit $\sum_{k\in\underline{r}_o} \zeta_{k1} = \alpha_{r+1}$ und $\zeta_{k1} + \zeta_{k0} = \alpha_k$ für alle $k\in\underline{r}$.

Wie bereits im Beweis von 9.1.12. allgemein gezeigt, ist nur einer der Summanden aus $\hat{\Gamma}_{|\alpha|}(A)$, nämlich gerade $a_{i_1}^{\langle\alpha_1\rangle} \ldots a_{i_{r+1}}^{\langle\alpha_{r+1}\rangle}$. Für alle anderen Summanden gilt:

(*) $\sum_{k\in\underline{r}_o} \zeta_{k1} + \sum_{k\in\underline{r}} \zeta_{k0} < |\alpha|$. Nach Vorraussetzung gilt:

$a_{i_k} a_{i_{r+1}} = s_1 a_{p_1} + \ldots + s_l a_{p_l}$ mit $s_k\in S$, $p_k\in I$ $(\forall k\in\underline{l})$.

$a_{i_k} a_{i_{r+1}}^{[\zeta_{k1}]} = \sum_{q_1+\ldots+q_l=\zeta_{k1}} \prod_{i\in\underline{l}} s_i^{q_i} \prod_{i\in\underline{l}} a_{p_i}^{[q_i]}$. Es gilt:

$q_i \leq \zeta_{k1} \leq \alpha_k \leq M := \max\{\alpha_q \neq 0 \mid q\in\underline{r+1}\}$, sowie $\zeta_{01} \leq \alpha_{r+1} \leq M$ und $\zeta_{k0} \leq \alpha_k \leq M$.

Mit $m := \min\{\alpha_q \neq 0 \mid q\in\underline{r+1}\}$ hat man die Fälle

1) $m=\alpha_{r+1} \Longrightarrow \exists k\in\underline{r}_o : 0 \neq \zeta_{k1} \leq \alpha_{r+1}$

2) $m=\alpha_k$ mit $k\in\underline{r} \Longrightarrow \exists i\in\underline{1}_o : 0 \neq \zeta_{ki} \leq \alpha_k$.

Wegen (*) und $q_1+\ldots+q_l=\zeta_{k1}$ ist damit die Behauptung mit (A1) und (A2) bewiesen.

Faßt man jetzt noch Elemente $a_p^{[\beta]} a_q^{[\gamma]}$ zu $[\beta,\gamma] a_p^{[\beta+\gamma]}$ zusammen, falls $p=q$ ist, so ändert sich die Summe der Exponenten nicht, und man erhält die Behauptung mit (A3), wobei jetzt allerdings (A1) und (A2) verletzt sein können. ■

9.2.4.SATZ: Ist $\{a_i\}_{i\in I}$ A , so liegt $\prod_{i\in I} a_i^{\langle\alpha_i\rangle}$ mit $\alpha_i\in\mathbb{N}_o$ in dem Unterring von $\hat{\Gamma}(A)$, der erzeugt wird von den Elementen

$a^{<\beta>}$ mit 1) $\beta \leq \min\{\alpha_i \neq 0 \mid i \in I\}$ und 2) a ist Monom in den Buchstaben a_i mit $\alpha_i \neq 0$.

BEW.: Sei $I' := \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$ und E das von den Elementen a_i mit $i \in I'$ erzeugte Monoid, dann ist E $\{0,1\}$-Lin. Nach 9.2.3. ist

$$\prod_{i \in I} a_i^{<\alpha_i>} = \prod_{i \in I'} a_i^{<\alpha_i>} = \left(\prod_{i \in I' - \{k\}} a_i^{<\alpha_i>}\right) \tau\, a_k^{<\alpha_k>}$$ - $\{0,1\}$-Linearkombination von Elementen $b_{j_1}^{<\beta_1>} \ldots b_{j_l}^{<\beta_l>}$ mit $k \in I'$, $j_r \in E$ und $|\beta| < |\alpha|$, sowie $\min\{\beta_i \neq 0 \mid i \in \underline{l}\} \leq \min\{\alpha_j \neq 0 \mid j \in I'\} =: \alpha_k$ (wähle k so!). Die Behauptung folgt durch Induktion über $|\alpha|$, da das von E erzeugte Monoid gleich E ist. ■

9.2.5.LEMMA: $E := \{a_i\}_{i \in I} \subset A$ sei S-Lin bzgl. einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $\dot{S}$ von R. Für $\alpha \in \mathbb{N}_o^{(I)}$ gilt dann:

$$\tau_{i \in I} a_i^{<\alpha_i>} = \prod_{i \in I} a_i^{<\alpha_i>} + \text{S-Linearkomb. von Elementen}$$

$a_{j_1}^{<\beta_1>} \ldots a_{j_k}^{<\beta_k>}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $j_l \in I$ für alle $l \in \underline{k}$ und $\beta \in \mathbb{N}_o^k$ mit $|\beta| < |\alpha|$, sowie (A1) $\beta_p \leq \max\{\alpha_i \mid i \in I\}$ $\forall p \in \underline{k}$ und

(A2) $\min\{\beta_i \neq 0 \mid i \in \underline{k}\} \leq \min\{\alpha_i \neq 0 \mid i \in I\}$.

Ist S sogar Unterring von R, so kann man an Stelle von (A1) und (A2) auch annehmen: (A3) $a_{j_p} \neq a_{j_q}$ für alle $p,q \in \underline{k}$ mit $p \neq q$.

BEW. durch Induktion über $|\alpha|$: Ist $|\alpha| = 0$, ist nichts zu zeigen. Andernfalls existiert $l \in I$ mit $\alpha_l \neq 0$.

$$\tau_{i \in I} a_i^{<\alpha_i>} = \left(\tau_{l \neq i \in I} a_i^{<\alpha_i>}\right) \tau\, a_l^{<\alpha_l>} \underset{\text{Ind. Vor.}}{=} \prod_{l \neq i \in I} a_i^{<\alpha_i>} \tau\, a_l^{<\alpha_l>} +$$

S-Linearkombination von Elementen der Form

$a_{j_1}^{<\beta_1>} \ldots a_{j_k}^{<\beta_k>} \tau\, a_1^{<\alpha_1>}$ mit $k\in\mathbb{N}$, $j_r\in I$ $(\forall r\in\underline{k})$, $(*)\ |\beta|<\sum_{1\neq i\in I}\alpha_i$,

sowie entweder

a) $\forall r\in\underline{k}$: $\beta_r\leq\max\{\alpha_i\,|\,i\in I-\{1\}\}=:M'$ und $\min\{\beta_r\neq 0\,|\,r\in\underline{k}\}\leq \min\{\alpha_i\neq 0\,|\,1\neq i\in I\}=:m'$

oder

b) $a_{j_u}\neq a_{j_v}$ für alle $u,v\in\underline{k}$ mit $u\neq v$.

$\prod_{1\neq i\in I} a_i^{<\alpha_i>}\tau\, a_1^{<\alpha_1>} \underset{9.2.3.}{=} \prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}$ + S-Linearkomb. von Elementen $a_{p_1}^{<\gamma_1>}\ldots a_{p_q}^{<\gamma_q>}$ mit $q\in\mathbb{N}$, $p_r\in I$ $(\forall r\in\underline{q})$, $|\gamma|<|\alpha|$,

sowie entweder

c) $\forall r\in\underline{q}$: $\gamma_r\leq\max\{\alpha_i\,|\,i\in I\}=:M$ und $\min\{\gamma_r\neq 0\,|\,r\in\underline{q}\}\leq \min\{\gamma_i\neq 0\,|\,i\in I\}=:m$

oder

d) $a_{p_u}\neq a_{p_v}$ für alle $u,v\in\underline{q}$ mit $u\neq v$.

$a_{j_1}^{<\beta_1>}\ldots a_{j_k}^{<\beta_k>}\tau\, a_1^{<\alpha_1>} \underset{9.2.3.}{=} a_{j_1}^{<\beta_1>}\ldots a_{j_k}^{<\beta_k>} a_1^{<\alpha_1>}$ + S-Linearkombinationen von Elementen $a_{p_1}^{<\gamma_1>}\ldots a_{p_q}^{<\gamma_q>}$ mit $q\in\mathbb{N}$, $p_r\in I$ $(\forall r\in\underline{q})$, $|\gamma|<|\beta|+\alpha_1$, sowie entweder

e) $\forall r\in\underline{q}$: $\gamma_r\leq\max\{\beta_1,\ldots,\beta_k,\alpha_1\}\underset{a)}{\leq}\max\{M',\alpha_1\}=M$ und $\min\{\gamma_r\neq 0\,|\,r\in\underline{q}\}\leq\min\{\alpha_1,\min\{\beta_r\neq 0\,|\,r\in\underline{k}\}\}\underset{a)}{\leq}\min\{\alpha_1,m'\}=m$

oder

f) $a_{p_u}\neq a_{p_v}$ für alle $u,v\in\underline{q}$ mit $u\neq v$.

Es bleibt $a_{j_1}^{<\beta_1>}\ldots a_{j_k}^{<\beta_k>} a_1^{<\alpha_1>}$ zu betrachten. $\beta_1+\ldots+\beta_k+\alpha_1 \underset{(*)}{<} \sum_{i\in I}\alpha_i$. Ferner ist entweder

g) $\min\{\alpha_1, \min\{\beta_r \neq 0 \mid r\in\underline{k}\}\} \leq m$ und $\forall r\in\underline{k}$: $\beta_r \leq M' \leq M$ (folgt aus a)) sowie $\alpha_1 \leq M$

oder

h) Um (A3) zu erreichen, müssen mölicherweise noch $a_1^{<\alpha_1>}$ und ein oder mehrere $a_{j_u}^{<\beta_u>}$ zusammengefaßt werden. ■

9.2.6.LEMMA: S sei ein Unterring von R, und $E:=\{a_i\}_{i\in I}\subset A$ sei S-Lin. Die von den Elementen $a^{<\gamma>}$ mit $a\in E$ und $\gamma\in\mathbb{N}_0$ aufgespannte S- bzw. R-Subalgebra von $\hat{\Gamma}(A)$ wird als S- bzw. R-Modul aufgespannt von den Elementen

$a_{i_1}^{<\alpha_1>} \ldots a_{i_k}^{<\alpha_k>}$ mit $k\in\mathbb{N}$ und $\alpha_r\in\mathbb{N}_0$, $i_r\in I$ für alle $r\in\underline{k}$.

BEW.:1) Nach 9.2.5. liegt die von den $a^{<\gamma>}$ aufgespannte S-(R-) Algebra in dem behaupteten Untermodul.

2) $a_{i_1}^{<\alpha_1>} \ldots a_{i_k}^{<\alpha_k>} \underset{9.2.5.}{=} a_{i_1}^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau a_{i_k}^{<\alpha_k>}$ + S-Linearkomb. von Elementen $a_{j_1}^{<\beta_1>} \ldots a_{j_s}^{<\beta_s>}$ mit $|\beta|<|\alpha|$. Durch Induktion über $|\alpha|$ ergibt sich, daß $a_{i_1}^{<\alpha_1>} \ldots a_{i_k}^{<\alpha_k>}$ in der von den $a^{<\gamma>}$ aufgespannten Subalgebra liegt. ■

9.2.7.KOR.: Ist B Erzeugendensystem des R-Moduls A, dann wird $\hat{\Gamma}(A)$ als Algebra erzeugt von den Elementen $b^{<i>}$ mit $i\in\mathbb{N}_0$ und $b\in B$. ■

9.2.8.KOR.: Ist B Erzeugendensystem des R-Moduls A, dann wird für alle $k\in\mathbb{N}_0$ $(\Gamma_k(A),\tau)$ als R-Algebra erzeugt von den Elementen $b^{[i]}\,{}_1{}_A^{[k-i]}$ mit $i\in\underline{k}_0$ und $b\in B$.

BEW.: Folgt aus 9.1.7., da $\pi_k(b^{<i>}) = b^{[i]}1_A^{[k-i]}$. ■

9.2.9.LEMMA: S sei ein Unterring von R, und $E:=\{a_i\}_{i\in I}\subset A$ sei S-Lin. Die von $1_{\hat{\Gamma}(A)}$ und den Elementen $a^{<1>}$ mit $a\in E$ erzeugte S- bzw. R- Algebra wird als S- bzw. R- Modul aufgespannt von den Elementen $a_{i_1}^{<1>}\ldots a_{i_k}^{<1>}$ mit $k\in\mathbb{N}_o$ und $i_j\in I$.

BEW.: Analog zum Beweis von 9.2.6. unter Verwendung von 9.2.5. mit (A1). ■

9.2.10.KOR.: Ist R ein Körper der Charakteristik 0, A eine R-Algebra und B ein Erzeugendensystem von A als R-Vektorraum, dann wird $\hat{\Gamma}(A)$ als Algebra erzeugt von $1_{\hat{\Gamma}(A)}$ und den Elementen $b^{<1>}$ mit $b\in B$.

BEW.: $\hat{\Gamma}(A)$ wird nach 1.2.7. als R-Vektorraum aufgespannt von den Elementen $b_1^{<1>}\ldots b_k^{<1>}$ mit $k\in\mathbb{N}_o$ und $b_i\in B$. Die Behauptung folgt aus 9.2.9.. ■

9.2.11.SATZ: Ist A als R-Modul frei mit Basis $B=\{a_1<a_2<\ldots\}$, dann ist $C:=\{a_1^{<\alpha_1>}\otimes a_2^{<\alpha_2>}\otimes\ldots.\mid \alpha_i\in\mathbb{N}_o\ ;\ 0\leq|\alpha|<\infty\}$ Basis von $\hat{\Gamma}(A)$.

BEW.: $\hat{\Gamma}(A)$ hat nach 1.2.6. die Basis $C':=\{a_1^{<\alpha_1>}a_2^{<\alpha_2>}\ldots.\mid \alpha_i\in\mathbb{N}_o\ ;\ 0\leq|\alpha|<\infty\}$. Für $a:=a_1^{<\alpha_1>}a_2^{<\alpha_2>}\ldots$ definiere $k_a:=$ und $l_a:=\max\{i\in\mathbb{N}_o\mid\alpha_i\neq 0\}$. Bei festem k,l gibt es nur endlich viele a mit $k_a=k$ und $l_a=l$. Ordne C' so an, daß gilt: $a'<a$ falls $k_{a'}<k_a$. Dies läßt sich so machen, daß sich eine Wohlordnung ergibt.

Definiere $F \in End(\hat{\Gamma}(A))$ durch

$F(a_1^{<\alpha_1>} \ldots a_k^{<\alpha_k>}) := a_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau a_k^{<\alpha_k>}$. Nach 9.2.5. mit (A3) gilt dann: $F(a_1^{<\alpha_1>} \ldots a_k^{<\alpha_k>}) = a_1^{<\alpha_1>} \ldots a_k^{<\alpha_k>}$ + R-Linearkomb.

Von Elementen $c \in C'$ mit $c < a_1^{<\alpha_1>} \ldots a_k^{<\alpha_k>}$. Nach A.I.1(Anhang) mit f=id folgt, daß F Isomorphismus ist. ■

9.2.12.SATZ: R sei ein Körper der Charakteristik 0. A sei eine R-Algebra, die als R-Vektorraum die Basis $B=\{a_1<a_2<\ldots\}$ besitzt. Dann ist $C:=\{ a_{i_1}^{<1>} \tau \ldots \tau a_{i_k}^{<1>} \mid k \in \mathbb{N}_0; i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}$ Basis von $\hat{\Gamma}(A)$. (k=0 in Def.von C liefert $1_{\hat{\Gamma}(A)}$)

BEW.: $\hat{\Gamma}(A)$ hat nach 1.2.7. die Basis $C' := \{a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>} \mid k \in \mathbb{N}_0; i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}$. Zu festem k und $l := \max\{i \mid i=i_j \text{ für ein } j \in \underline{k}\}$ existieren nur endlich viele Elemente $a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>}$ aus C'.

Wohlordne C' so, daß $a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>} < a_{j_1}^{<1>} \ldots a_{j_s}^{<1>}$ falls k<s.

Definiere $F \in End(\hat{\Gamma}(A))$ durch $F(a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>}) := a_{i_1}^{<1>} \tau \ldots \tau a_{i_k}^{<1>}$

Nach 9.2.5. mit (A1) gilt dann: $F(a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>}) = a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>}$

+ R-Linearkomb. von Elementen $c \in C'$ mit $c < a_{i_1}^{<1>} \ldots a_{i_k}^{<1>}$.

Nach A.I.1.mit f=id ist somit F ein Isomorphismus. ■

9.2.13.SATZ: R sei ein Körper der Charakteristik p>0. Die R-Algebra A habe als R-Vektorraum die Basis $B=\{a_i<a_2<\ldots\}$.

Dann ist $C:=\{ \tau_i \tau_{h \geq 0} (a_i^{<p^h>})^{\tau \alpha_{ih}} \mid 0 \leq \alpha_{ih} < p; \sum_{i,h} \alpha_{ih} < \infty\}$ Basis von $\hat{\Gamma}(A)$.

BEW.: $C' := \{ \prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\alpha_{ih}} \mid 0 \leq \alpha_{ih} < p, \sum_{i,h} \alpha_{ih} < \infty \}$ ist Basis nach 1.2.8.+Zusatzüberlegung . Wohlordne C' so, daß

$\prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\alpha_{ih}} < \prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\beta_{ih}}$ falls $\sum_{i,h} p^h \alpha_{ih} < \sum_{i,h} p^h \beta_{ih}$ ist, oder falls $\sum_{i,h} p^h \alpha_{ih} = \sum_{i,h} p^h \beta_{ih}$ ist und $\max\{(i,h) \mid \alpha_{ih} \neq 0\} < \max\{(i,h) \mid \beta_{ih} \neq 0\}$. Im letzteren Fall sollen die Tupel (i,h) lexikographisch geordnet sein.

Definiere $F \in \mathrm{End}(\hat{\Gamma}(A))$ durch $F(\prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\alpha_{ih}}) := \tau \prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\tau \alpha_{ih}}$.

Nach 9.2.5. mit (A3) gilt dann:

$F(\prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\alpha_{ih}}) = \prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\alpha_{ih}}$ + R-Linearkomb. von Elementen $\prod_j b_j^{<\gamma_j>}$ mit $b_j \in B$, $|\gamma| < \sum_{i,h} p^h \alpha_{ih}$ und $b_j \neq b_k$ für $j \neq k$.

Nach [Rob 63]App.I,Prop.1 ist $\prod_j b_j^{<\gamma_j>} = z \cdot \prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\zeta_{ih}}$ mit $z \in R$, $0 \leq \zeta_{ih} < p$ und $\sum_{i,h} p^h \zeta_{ih} = \sum_j \gamma_j < \sum_{i,h} p^h \alpha_{ih}$. Also:

$\prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\zeta_{ih}} \in C'$ und ist kleiner als $\prod_{i,h} (a_i^{<p^h>})^{\alpha_{ih}}$.

Nach A.I.1(Anhang) mit f=id ist also F ein Isomorphismus. ■

KAPITEL 10 : Eine Anwendung von $\hat{\Gamma}(A)$: Polarisationsoperatoren

Nach den technischen Überlegungen des letzten Kapitels nun noch einmal zurück zum Diagramm (D_{11}) aus 8.4.8.. Für den folgenden Spezialfall ergibt sich nämlich ein "natürliches Auftreten" von $\hat{\Gamma}(A)$.

10.1. Mit A:=EndN, M:=Hom(L,N) und ω:EndN$\longrightarrow$End(Hom(L,N)), gegeben durch $\forall f\in EndN$: $f \longmapsto (\forall g\in Hom(L,N)\colon g \longmapsto f\circ g)$, sowie G:=S liefert 8.4.8. das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\oplus_i \Gamma_i(EndN) & \hookrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}_0} \Gamma_i(EndN) & \xrightarrow{(\beta_{Si}\,\Gamma_i(\omega))_i} & \prod_i EndS_i(Hom(L,N)) \\
\downarrow Sh & & \downarrow Sh & & \downarrow Sh_{S(.)} \\
\hat{\Gamma}(EndN) & \hookrightarrow & \prod_{j\in\mathbb{N}_0} \Gamma_j(EndN) & \xrightarrow{(\beta_{Sj}\,\Gamma_j(\omega))_j} & \prod_j EndS_j(Hom(L,N)) \hookrightarrow EndS(Hom(L,N))
\end{array}$$

Die untere Zeile ist ein R-Algebra-Homomorphismus

Pol: $(\hat{\Gamma}(EndN),\tau) \longrightarrow (End(S(Hom(L,N)),\circ)$ und liefert also eine Links-$\hat{\Gamma}$(EndN)-Modul-Struktur auf S(Hom(L,N)). Um die Wirkung von $\prod_{i\in I} f_i^{<\alpha_i>} \in \hat{\Gamma}(EndN)$ auf S(Hom(L,N)) zu betrachten, kann man wegen der Kommutativität des Diagramms auch die Wirkung von $\prod_{i\in I} f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(EndN)$ unter $Sh_{S(.)}\circ\beta_{S|\alpha|}\circ\Gamma_{|\alpha|}(\omega)$ ansehen, nämlich von $id_{S(Hom(L,N))} * \prod_{i\in I} \beta_{S\alpha_i}(\omega_{f_i})$.

Für $\bigvee_{j\in\underline{k}} g_j \in S(Hom(L,N))$ hat man:

$$(id_{S(Hom(L,N))} * \prod_{i\in\underline{l}} \beta_{S\alpha_i}(\omega_{f_i}))(\bigvee_{j\in\underline{k}} g_j) =$$

$$\sum_{\sigma\in K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l,k-|\alpha|)} (\bigvee_{i\in\underline{l}} (f_i\circ g_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)} \vee \ldots \vee f_i\circ g_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)})) \vee g_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_l+1)} \vee \ldots \vee g_{\sigma(k)}\ .$$

(Beachte: $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_l,k-|\alpha|)=\emptyset$ für $k<|\alpha|$)

Sei jetzt weiter N:= R^m mit Basis $\{e_i\}_{i\in\underline{m}}$ und L:= R^n mit Basis $\{\bar{e}_j\}_{j\in\underline{n}}$. Ist für $i,j\in\underline{m}$ $e_{ij}\in EndN$ durch $e_{ij}(e_k):=\delta_{jk}e_i$ gegeben und für $p\in\underline{m}$, $q\in\underline{n}$ $\bar{e}_{pq}\in Hom(L,N)$ durch $\bar{e}_{pq}(\bar{e}_r):=\delta_{qr}e_p$, so ist $\{e_{ij}\}_{i,j\in\underline{m}}$ Basis von EndN und $\{\bar{e}_{pq}\}_{p\in\underline{m},\,q\in\underline{n}}$ Basis von Hom(L,N).

$\hat{\Gamma}(\mathrm{End}N)$ wird, etwa nach 9.2.11., erzeugt von den Elementen $e_{ij}^{<k>}$ mit $i,j\in\underline{m}$ und $k\in\mathbb{N}_0$. Da Pol R-Algebra-Hom. ist, reicht es also, die Wirkung der $e_{ij}^{<k>}$ auf $S(\mathrm{Hom}(L,N))$ zu kennen.

$\bar{e}_{p_1q_1}\vee\ldots\vee\bar{e}_{p_lq_l}$ sei ein Basiselement von $S_l(\mathrm{Hom}(L,N))$.

$$\mathrm{id}_{S(\mathrm{Hom}(L,N))}*S_k(\omega_{e_{ij}})(\bar{e}_{p_1q_1}\vee\ldots\vee\bar{e}_{p_lq_l}) =$$

$$=\sum_{\sigma\in K(l-k,k)}\bar{e}_{p_{\sigma(1)}q_{\sigma(1)}}\vee\ldots\vee\bar{e}_{p_{\sigma(l-k)}q_{\sigma(l-k)}}\vee e_{ij}\circ\bar{e}_{p_{\sigma(l-k+1)}q_{\sigma(l-k+1)}}\vee\ldots$$

$$\ldots\ldots\vee e_{ij}\,\bar{e}_{p_{\sigma(l)}q_{\sigma(l)}} =$$

$$=\sum_{\substack{J\subset\{r\in\underline{l}\,|\,p_r=j\}\\ |J|=k}}\Big(\bigvee_{r\in\underline{l}-J}\bar{e}_{p_rq_r}\Big)\vee\Big(\bigvee_{r\in J}\bar{e}_{iq_r}\Big)\quad .$$

Das Bild von $e_{ij}^{<k>}$ wirkt also so, daß je k Auftreten von $\bar{e}_{jq}$ durch $\bar{e}_{iq}$ ersetzt werden, und aufsummiert wird über alle Möglichkeiten, k Elemente $\bar{e}_{jq}$ auszuwählen.

Identifiziert man insbesondere die Basiselemente $\bigvee_{\substack{p\in\underline{m}\\ q\in\underline{n}}}\bar{e}_{pq}^{\vee\beta_{pq}}$ von $S(\mathrm{Hom}(L,N))$ mit den Basiselementen $\prod_{\substack{p\in\underline{m}\\ q\in\underline{n}}}(p,q)^{\beta_{pq}}$ der "Letter-Place-Algebra" R_m^n (vgl. [Cla 79]), so ist das Bild von $e_{ij}^{<k>}$ in $\mathrm{End}(S(\mathrm{Hom}(L,N)))\cong\mathrm{End}(R_m^n)$ gerade der "entfärbte Letter-Set-Polarisation-Operator" mit der Bezeichnung $\delta\circ D_L^k(\underline{i},j)\big|_{R_m^n}$ von [Cla 80] (Def.1.21.).

Mit etwas mehr Schreibaufwand rechnet man nach (betrachte die Bilder der Basiselemente $\prod_{i,j}e_{ij}^{<\alpha_{ij}>}$!):

10.1.1.LEMMA: $\mathrm{Pol}(\hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^m))) = \mathcal{D}_L(m,n;R)$ (Bez. [Cla 80])■

10.1.2.KOR.: $\mathcal{D}_L(m,n;R)$ ist die von den Elementen $\delta \circ D_L^k(\underline{i},j)\big|_{R_m^n}$ mit $i,j \in \underline{m}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ erzeugte Subalgebra von $End(R_m^n)$. ■

Ist speziell $L=N=R^m$, so stimmt ω mit λ aus 8.4.11. überein, und es folgt sofort:

10.1.3.KOR.: $\hat{\Gamma}(End(R^m)) \underset{Pol}{\cong} \mathcal{D}_L(m,m;R)$ ■

10.1.4.BEM.: 10.1.3. gilt nicht für beliebiges $L \neq N$, wie folgendes Beispiel zeigt: $L=R$, $N=R^2$.
Beh.: $Pol(e_{11}^{<1>}e_{22}^{<1>}-e_{12}^{<1>}e_{21}^{<1>})=0$. Es reicht z.z.:
$H:= \beta_{S2} \circ \Gamma_2(\omega)(e_{11}^{[1]}e_{22}^{[1]}-e_{12}^{[1]}e_{21}^{[1]}) = 0$ in $S_2(Hom(R,R^2))$.
Die Basiselemente von $S_2(Hom(R,R^2))$ sind $b_1:=\bar{e}_{11}^{\vee 2}$, $b_2:=\bar{e}_{21}^{\vee 2}$, und $b_3:=\bar{e}_{11}\vee\bar{e}_{21}$. $H(b_1)=H(b_2)=0$, da in b_1 und b_2 beide "ersten Plätze" gleich besetzt sind. $H(b_3)=\bar{e}_{11}\vee\bar{e}_{21}-\bar{e}_{21}\vee\bar{e}_{11}=0$.

KAPITEL 11 : $\hat{\Gamma}(A)$ und die Universelle Einhüllende der Lie-Algebra A_L .

Das wesentliche Ergebnis dieses Kapitels für die spätere Anwendung wird die Darstellung von $\hat{\Gamma}(A)$ über Erzeugende und Relationen sein, falls A Algebra über einem Körper R der Charakteristk 0 ist. Diese Darstellung ist möglich, weil in diesem Fall $\hat{\Gamma}(A)$ isomorph ist zur universellen Einhüllenden von A, betrachtet als Lie-Algebra.

11.1. A sei wieder eine R-Algebra. Mit der durch $[x,y]:= xy-yx$ $(\forall x,y \in A)$ definierten Multiplikation wird A zur Lie-

Algebra. Die Lie-Algebra A wird im Folgenden stets mit $\underline{\underline{A_L}}$ bezeichnet.

11.1.1. Der R-Modul Hom. $\underline{\underline{L}}:A_L \cong \Gamma_1(A) \hookrightarrow \Gamma(A) \xrightarrow{Sh} \hat{\Gamma}(A)_L$
$(L(a)=a^{<1>}\ \forall a\in A)$ ist sogar ein Lie-Algebra-Homomorphismus.

BEW.: $[a^{<1>},b^{<1>}] = a^{<1>}\tau b^{<1>} - b^{<1>}\tau a^{<1>} = ab^{<1>} + a^{<1>}b^{<1>} - ba^{<1>} - b^{<1>}a^{<1>} = ab^{<1>} - ba^{<1>} = [a,b]^{<1>}$. ■

Beachte: L ist kein R-Algebra-Homomorphismus!

Wegen der universellen Eigenschaft der Universellen Einhüllenden $(U(A_L), \iota:A \longrightarrow U(A_L))$ existiert ein eindeutig bestimmter R-Algebra-Hom. $\underline{\underline{\Phi'}}:U(A_L) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ mit $\Phi' \circ \iota = L$.

11.1.2. $\Phi'(\pi(a_1 \otimes \ldots \otimes a_l)) = a_1^{<1>}\tau \ldots \tau a_l^{<1>}$, wobei $\underline{\underline{\pi}}:T(A) \to U(A_L)$ der kanonische Epimorphismus ist (vgl. etwa [Hum 72]).

Nach 11.1.2. ist Φ' Homomorphismus filtrierter Algebren (aufsteigende Filtrierung!). Daher liefert Φ' einen Homomorph. $\underline{\underline{\Phi}}$ der graduierten R-Algebren $gr(U(A_L))$ nach $gr(\hat{\Gamma}(A))$.
Nach dem PBW-Theorem (vgl. [Hum 72]17.3.) gibt es dann einen Homomorphismus graduierter Algebren

$$S(A) \cong gr(U(A_L)) \xrightarrow[\overline{\Phi}]{} gr(\hat{\Gamma}(A)) \underset{9.1.12.}{\cong} \Gamma(A) .$$

Die Abbildung hat für $a_1,\ldots,a_i \in A$ folgendes Aussehen:
$a_1 \vee \ldots \vee a_i \longmapsto pr_i(\pi(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i)) \longmapsto pr_i'(a_1^{<1>}\tau \ldots \tau a_i^{<1>}) \longmapsto a_1^{[1]} \ldots a_i^{[1]}$, wobei $pr_i:U_i \to {}^{U_i}\!/_{U_{i-1}}$ (vgl. [Hum 72]17.3) und $pr_i':\hat{\Gamma}_i \to {}^{\hat{\Gamma}_i}\!/_{\hat{\Gamma}_{i-1}}$ die kanonischen Projektionen sind.
Es ergibt sich das kommutative Diagramm:

$$(D_1)\qquad \begin{array}{ccc} gr(U(A_L)) & \cong & S(A) \ni a_1 v \ldots v a_i \\ \downarrow \overline{\Phi} & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ gr(\hat{\Gamma}(A)) & \cong & \Gamma(A) \ni a_1^{[1]} \ldots a_i^{[1]} \end{array}$$

11.1.3.SATZ.: Ist R ein Körper der Charakteristik 0, und ist $\{a_1<a_2<\ldots\}$ Basis der R-Algebra A als R-Vektorraum, so gilt:

a) Der kan. R-Algebra-Hom. $S(A) \longrightarrow \Gamma(A)$ ist ein Isomorph..

b) $\overline{\Phi}: gr(U(A_L)) \longrightarrow gr(\hat{\Gamma}(A))$ ist R-Algebra-Isomorphismus.

c) $\Phi': U(A_L) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ ist R-Algebra-Isomorphismus.

BEW.: a) vgl. [Rob 63] III.6. ; b) folgt mit (D_1) sofort aus a) ; c) Folgerung aus dem PBW-Theorem (vgl. [Hum 72] 17.3Cor.C) und 9.2.12., da Basis auf Basis abgebildet wird. ■

11.1.4.BEM.: Satz 11.1.3.c) ist ein Spezialfall des Theorems 13.0.1. in [Swe 69], welches besagt, daß eine irreduzible cocommutative Hopf-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 isomorph ist zur Universellen Einhüllenden von P(H), der Menge der"primitiven" Elemente von H, welche mit [.,.] die Struktur einer Lie-Algebra trägt. Als Cogebra ist $\hat{\Gamma}(A)$ dabei (nach Definition) isomorph zu $\Gamma(A)$ (vgl. auch Kap. 14). $\Gamma(A)$ ist aber eine irreduzible cokommutative Cogebra mit $P(\Gamma(A)) = A$ ([Swe 69] 12.2.). Da $\hat{\Gamma}(A)$ sogar Hopf-Algebra ist (ohne Beweis), folgt die Behauptung.

Für die spätere Anwendung (vgl. Kap.22) wichtig ist das folgende Korollar:

11.1.5.KOR.: Ist R ein Körper der Charakteristik 0, und ist $\{a_1<a_2<\dots\}$ eine Basis der R-Algebra A als R-Vektorraum, dann ist $\hat{\Gamma}(A)$ R-Algebra mit (nicht kommutierenden) Generatoren $a_i^{<1>}\ \forall i$ und Relationen

$$a_i^{<1>} \tau a_j^{<1>} - a_j^{<1>} \tau a_i^{<1>} = [a_i,a_j]^{<1>} \quad (\forall i<j).$$

BEW.: $T(A)$ wird als R-Algebra frei erzeugt von den a_i. $U(A_L)$ ist definiert über die Relationen $a_i \otimes a_j - a_j \otimes a_i = [a_i,a_j]$ für $i<j$. $U(A_L)$ ist damit die R-Algebra mit Erzeugenden $\pi(a_i)\ \forall i$ und den Relationen

$$\pi(a_i)\pi(a_j) - \pi(a_j)\pi(a_i) = \pi([a_i,a_j]).$$

Die Behauptung folgt aus 11.1.3.c). ■

11.1.6.BEM.: Ist L eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$, so existiert nach [Kos 66] (vgl. auch [Hum 72] 26.4.) für $U(L)$ eine $\mathbb{Z}$-Form $U(L)_{\mathbb{Z}}$, d.h. $U(L)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong U(L)$, die $\mathbb{Z}$-Algebra ist und eine spezielle $\mathbb{Z}$-Basis besitzt.

Ist speziell L die zu $Gl(n,\mathbb{C})$ gehörige Lie-Algebra $M_n(\mathbb{C})_L$, so gilt:

$$U(M_n(\mathbb{C})_L)_{\mathbb{Z}} \cong \hat{\Gamma}^{\mathbb{Z}}(M_n(\mathbb{Z})) \ .$$

Um dies zu zeigen, soll die Darstellung

$$(*) \qquad e^{(N)} = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(\Theta_j^i)^{N_j^i}}{(N_j^i)!} \prod_{1\le i\le n} \binom{\Theta_i^i}{N_i^i} \prod_{n\ge i>j\ge 1} \frac{(\Theta_j^i)^{N_j^i}}{(N_j^i)!}$$

der Kostant $\mathbb{Z}$-Form , genauer ihrer speziellen Basis, verwendet werden, wie sie in [Car/Lus 74] 2. zu finden ist. Dabei sind die Θ_j^i die zu den Elementarmatrizen e_{ij} gehörigen Generatoren der $\mathbb{Q}$-Algebra $U(M_n(\mathbb{Q})_L)$, die man nach

11.1.5. auch als $\Theta_j^i = e_{ij}^{<1>} \in \hat{\Gamma}^{\mathbb{Q}}(M_n(\mathbb{Q})) \cong \hat{\Gamma}^{\mathbb{Z}}(M_n(\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Q}$, also sogar als Elemente aus $\hat{\Gamma}^{\mathbb{Z}}(M_n(\mathbb{Z}))$ betrachten kann.

Für die Relationen gilt nach 11.1.5.:

$e_{ij}^{<1>} \tau e_{kl}^{<1>} - e_{kl}^{<1>} \tau e_{ij}^{<1>} = \delta_{jk} e_{il}^{<1>} - \delta_{il} e_{kj}^{<1>}$ (vgl. [Car/Lus 74] 2.(1)). Für $N = (N_j^i)_{i,j \in \underline{n}} \in \mathbb{Z}_o^{(n^2)}$ gilt:

$$(**) \quad \frac{(\Theta_j^i)^{N_j^i}}{(N_j^i)!} = \frac{(e_{ij}^{<1>})^{\tau N_j^i}}{(N_j^i)!} = e_{ij}^{<N_j^i>} \quad \text{falls } i \neq j \; !$$

Bew. durch Induktion nach N_j^i: $\frac{e_{ij}^{<1>\tau(m+1)}}{(m+1)!} = \frac{e_{ij}^{<1>\tau m}}{(m)!} \tau \frac{e_{ij}^{<1>}}{m+1} =$

$= \underset{\text{Ind.Vor.}}{e_{ij}^{<m>} \tau \frac{e_{ij}^{<1>}}{m+1}} \underset{i \neq j}{=} \frac{1}{m+1} e_{ij}^{<1>} e_{ij}^{<1>}$. ■

$$(***) \quad \binom{\Theta_i^i}{N_i^i} := \frac{1}{(N_i^i)!} \Theta_i^i (\Theta_i^i - 1) \cdots (\Theta_i^i - (N_i^i - 1)) =$$

$$= \frac{1}{(N_i^i)!} e_{ii}^{<1>} \tau (e_{ii}^{<1>} - 1 1_{\hat{\Gamma}}) \tau \ldots \tau (e_{ii}^{<1>} - (N_i^i - 1) 1_{\hat{\Gamma}}) = e_{ii}^{<N_i^i>}$$

Bew. durch Induktion über N_i^i:

$$\frac{1}{(m+1)!} e_{ii}^{<1>} \tau (e_{ii}^{<1>} - 1 \cdot 1_{\hat{\Gamma}}) \tau \ldots \tau (e_{ii}^{<1>} - ((m+1)-1) 1_{\hat{\Gamma}}) \underset{\text{Ind.Vor}}{=}$$

$$= e_{ii}^{<m>} \tau \frac{1}{m+1} (e_{ii}^{<1>} - m \cdot 1_{\hat{\Gamma}}) = \frac{1}{m+1} (e_{ii}^{<m-1>} e_{ii}^{<1>} + e_{ii}^{<m>} e_{ii}^{<1>} - m \cdot e_{ii}^{<m>}) =$$

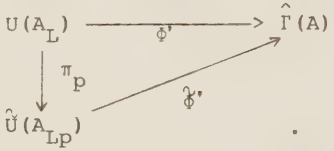
$$= \frac{1}{m+1} \cdot e_{ii}^{<m>} e_{ii}^{<1>} = e_{ii}^{<m+1>}. \quad \blacksquare$$

Damit ist gezeigt, daß in (*) gerade die $\mathbb{Z}$-Basiselemente

$O^{(N)} = \prod_{i,j \in \underline{n}} e_{ij}^{<N_j^i>}$ von $\hat{\Gamma}^{\mathbb{Z}}(M_n(\mathbb{Z}))$ dargestellt sind.

11.2. Über einem Körper der Charakteristik p>0 wird abweichend vom Char.-0-Fall $\Phi': U(A_L) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ kein Isomorphismus sein. Tatsächlich hat man ein kommutatives Diagramm

(D_2)



Dabei ist π_p der kanonische Epimorphismus auf die Faktoralgebra von $U(A_L)$ nach den Relationen $\iota(a^p) = \iota(a)^p$ für alle $a \in A_L$, die mit $\tilde{U}(A_{Lp})$ bezeichnet ist.
Genauer wird durch die Abbildung $a \longmapsto a^p$ von A_L nach A_L auf A die Struktur einer "eingeschränkten" oder "Lie-p-Algebra" definiert (vgl. etwa [Jac 66]V.7.), die hier (abweichend von [Jac 66]) mit A_{Lp} bezeichnet ist. Die Faktoralgebra $\tilde{U}(A_{Lp})$ ist die "u-Algebra" der eingeschränkten Lie-Algebra.
$\hat{\Gamma}(A)$ trägt mit $x \longmapsto x^{\tau p}$ ebenfalls die Struktur einer eingeschränkten Lie-Algebra $(\hat{\Gamma}(A)_{Lp})$. Für den Homomorphismus (11.1.1.) $L: A_{Lp} \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)_{Lp}$ gilt:

11.2.1. $L(a^p) = a^{p^{<1>}} = a^{<1>^{\tau p}} = L(a)^{\tau p}$ für alle $a \in A$.
(siehe hinten, 16.3.2.) ■

L ist somit sogar ein "Hom. der eingeschränkten Lie-Algebren" oder ein "p-Hom.". Wegen der universellen Eigenschaft (Th. 12 in [Jac 66]V.7.) von $\tilde{U}(A_{Lp})$ existiert damit ein R-Algebra-Hom. $\tilde{\Phi}'$, der nach Konstruktion das Diagramm (D_2) kommutativ macht.

11.2.2.SATZ:([Jac 66]V.7.Bew. zu Th.12.) Hat A die endliche Basis $\{a_1,\ldots,a_m\}$, so hat $\hat{U}(A_{Lp})$ die Basis

$$\{\pi_p\circ\pi(a_1)^{\alpha_1}\ldots\pi_p\circ\pi(a_m)^{\alpha_m} \mid 0\leq\alpha_i<p\} \ . \ \blacksquare$$

In diesem Fall ist $\hat{\Phi}'$sogar injektiv (vgl.9.2.13.), $\hat{U}(A_{Lp})$ also isomorph zu $U(A_L)/_{Kern\Phi}$.

KAPITEL 12 : Weitere Eigenschaften von $\hat{\Gamma}(A)$: Grundringerweiterung und Zentrum.

12.1. Das Zentrum von $\hat{\Gamma}(A)$

12.1.1.SATZ: $Zentr(\hat{\Gamma}(A)) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} Sh(Zentr(\Gamma_k(A),\tau))$

BEW.: "$\supset$" Sei $x\in Zentr(\Gamma_k(A),\tau)$, $y\in\Gamma(A)$ beliebig.

Beh.: $b:=[Sh(x),Sh(y)]=0$.

$b=0 \Longleftrightarrow \forall l\geq 0$: $\pi_l(b) = 0$ $\quad(b\in\prod_{l\geq 0}\Gamma_l(A)$!) .

$\pi_l(b) = [\pi_l\circ Sh(x),\pi_l\circ Sh(y)]$, da π_l R-Algebra-Hom. ist.

Es reicht also, für alle $l\in\mathbb{N}_0$ zu zeigen, $\pi_l\circ Sh(x)\in Zentr(\Gamma_l(A))$

Dies soll als Lemma formuliert werden.

12.1.2.LEMMA: $x\in Zentr(\Gamma_k(A),\tau) \Longrightarrow \forall l\in\mathbb{N}_0$: $\pi_l\circ Sh(x)$ liegt in $Zentr(\Gamma_l(A),\tau)$.

BEW. von 12.1.2.: $\pi_l\circ Sh(x) = x\,1^{[l-k]}$. $(\Gamma_l(A),\tau)$ wird als R-Algebra erzeugt von den Elementen der Form $a^{[i]}1^{[l-i]}$ mit $a\in A$ und $i\in\underline{l}_0$ (9.2.8.). Es reicht also zu zeigen:

$[x\cdot 1^{[1-k]}, a^{[i]}1^{[1-i]}]=0$ für alle $a\in A$, $i\in \underline{l}_o$.

Mit $c_p\in R$, $a_{pq}\in A$ und $x=\sum_{p\in \underline{r}} c_p \prod_{q\in I_q} a_{pq}^{[\alpha_{pq}]}$ ergibt sich:

$$x\cdot 1^{[1-k]}\tau a^{[i]}1^{[1-i]}=\sum_{p\in \underline{r}} c_p \prod_{q\in I_q} a_{pq}^{[\alpha_{pq}]}1^{[1-k]}\tau a^{[i]}1^{[1-i]} =$$

$$=\sum_{p\in \underline{r}} c_p \sum_{J_p} \prod_{q\in I_p} a_{pq}a^{[\zeta_{q1}]} \prod_{q\in I_p} a_{pq}^{[\zeta_{q0}]} a^{[\gamma]}1^{[\eta]} =:Y .$$

Dabei ist $J_p:=\{(\gamma,\eta,(\zeta_{qj})_{q\in I_p};j\in\{0,1\}\mid \forall q\in I_p:\zeta_{q1}+\zeta_{q0}=\alpha_{pq}$;

$\gamma+\sum_{q\in I_p}\zeta_{q1}=i$; $\eta+\sum_{q\in I_p}\zeta_{q0}=1-i$; $\gamma+\eta=1-k\}$.

Für $\gamma+\eta=1-k$ mit $\gamma\leq i$ und $\eta\leq 1-i$ definiere:

$K_{p\gamma\eta}:=\{(\zeta_{qj})_{q\in I_p};j\in\{0,1\}\mid \forall q\in I_p:\zeta_{q1}+\zeta_{q0}=\alpha_{pq};\gamma+\sum_{q\in I_p}\zeta_{q1}=i$;

$\eta+\sum_{q\in I_p}\zeta_{q0}=1-i\}$. Damit ergibt sich :

$$Y=\sum_{p\in \underline{r}} c_p \sum_{\gamma,\eta} a^{[\gamma]}1^{[\eta]}\Big(\sum_{(\zeta_{pj})\in K_{p\gamma\eta}} \prod_{q\in I_p} a_{pq}a^{[\zeta_{q1}]} \prod_{q\in I_p} a_{pq}^{[\zeta_{q0}]}\Big)$$ wie oben

$$=\sum_{\gamma,\eta} a^{[\gamma]}1^{[\eta]}\Big(\sum_{p\in \underline{r}} c_p \sum_{(\zeta_{pj})\in K_{p\gamma\eta}} \prod_{q\in I_p} a_{pq}a^{[\zeta_{q1}]} \prod_{q\in I_q} a_{pq}^{[\zeta_{q0}]}\Big)$$

$$=\sum_{\gamma,\eta} a^{[\gamma]}1^{[\eta]}\Big(\sum_{p\in \underline{r}} c_p \prod_{q\in I_p} a_{pq}^{[\alpha_{pq}]}\tau a^{[i-\gamma]}1^{[1-i-\eta]}\Big) =$$

$$=\sum_{\gamma,\eta} a^{[\gamma]}1^{[\eta]}\big(x\,\tau\, a^{[i-\gamma]}1^{[1-i-\eta]}\big) .$$

Beachte: $i-\gamma+1-i-\eta=1-(\gamma+\eta)=1-(1-k)=k$.

Da $x\in \mathrm{Zentr}(\Gamma_k(A))$ ist, gilt:

$$Y=\overline{\sum_{\gamma,\eta}} a^{[\gamma]}1^{[\eta]}\big(a^{[i-\gamma]}1^{[1-i-\eta]}\,\tau\, x\big)$$

Die Ausrechnung der Klammer ergibt Ausdrücke, die sich von den entsprechenden oben nur dadurch unterscheiden, daß $a_{pq}a$ durch aa_{pq} ersetzt ist. Führt man also obige Rechnung analog rückwärts aus, so ergibt sich:
$Y = a^{[i]}{}_1{}^{[1-i]} \tau x_1{}^{[1-k]}$. ■

BEW. 12.1.1. "⊂": Sei $x = \sum_i x_i \in \Gamma(A)$ mit $x_i \in \Gamma_i(A)$, $Sh(x) \in$ $Zentr(\hat{\Gamma}(A))$ und $i_o := \min\{i | x_i \neq 0\}$, dann gilt für $a \in \Gamma_{i_o}(A)$:

$a \tau x_{i_o} \underset{8.4.16.b)}{=} \pi_{i_o}(Sh(a)) \tau \pi_{i_o}(Sh(x_{i_o})) =$

$= \pi_{i_o}(Sh(a)) \tau \pi_{i_o}(Sh(x))$, da $\pi_{i_o}(Sh(b_k))=0$ ist, wenn $k>i_o$ ist und $b_k \in \Gamma_k(A)$. π_{i_o} ist R-Algebra-Hom., also gilt:

$a \tau x_{i_o} = \pi_{i_o}(Sh(a) \tau Sh(x)) = \pi_{i_o}(Sh(x) \tau Sh(a)) = x_{i_o} \tau a$ mit analoger Argumentation wie oben. Ergebnis: $x_{i_o} \in Zentr(\Gamma_{i_o}(A))$.
Sei jetzt $i>i_o$ und $b \in \Gamma_i(A)$, dann gilt:

$b \tau x_i = \pi_i(Sh(b)) \tau \pi_i(Sh(x_i)) = \pi_i(Sh(B)) \tau \pi_i(Sh(x)) -$
$\sum_{j<i} \pi_i(Sh(b)) \tau \pi_i(Sh(x_j))$.

Nimmt man induktiv an, daß $x_j \in Zentr(\Gamma_j(A))$ für $j<i$ bereits gezeigt wurde, und berücksichtigt, daß $\pi_i(Sh(x_j)) \in Zentr(\Gamma_i(A))$ ist (12.1.2.), so ergibt sich:

$b \tau x_i \underset{12.1.3.}{=} \pi_i(Sh(x)) \tau \pi_i(Sh(b)) - \sum_{j<i} \pi_i(Sh(x_j)) \tau \pi_i(Sh(b))$

$= \pi_i(Sh(x_i)) \tau \pi_i(Sh(b)) = x_i \tau b$. Es folgt, daß x_i im Zentrum von $\Gamma_i(A)$ liegt und also durch Induktion die Behauptung.

12.1.3.LEMMA: $z \in Zentr(\hat{\Gamma}(A)) \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_o : \pi_i(z) \in Zentr(\Gamma_i(A), \tau)$

BEW.: Folgt aus 9.1.7.. ■

12.1.4.BEM.: Daß sich Zentr($\hat{\Gamma}$(A)) nicht in einfacher Weise aus Zentr(A) ergibt, sieht man z.B. im Fall A=End(R^n). Das Zentrum Z von A hat mit Z≅R die denkbar einfachste Form, während für R=$\mathbb{Q}$ Zentr($\hat{\Gamma}$(A))≅R$[X_1,\ldots,X_n]$ ist (vgl.[Car/Lus 74]).

12.2. Die Grundringerweiterung von $\hat{\Gamma}$(A).

S sei eine kommutative R-Algebra, $\nu:=\nu^{RS}:\Gamma^R(A)\otimes S \to \Gamma^S(A\otimes S)$ der kanonische S-Algebra-Isomorphismus (1.2.12.).

Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
(\prod_{i\geq 0}\Gamma_i^R(A))\otimes_R S & \xrightarrow{\quad f \quad} & \prod_{i\geq 0}(\Gamma_i^R(A)\otimes_R S) & \xrightarrow{(\nu_i)_i} & \prod_{i\geq 0}\Gamma_i^S(A\otimes_R S) \\
\uparrow{\scriptstyle \text{Einb.}\otimes\text{id}_S} & & (D_1) & & \uparrow{\scriptstyle \text{Einb.}} \\
\hat{\Gamma}^R(A)\otimes_R S & \xrightarrow{\quad \hat{\nu}:=\hat{\nu}^{RS} \quad} & & & \hat{\Gamma}^S(A\otimes_R S) \\
\uparrow{\scriptstyle \text{Sh}\otimes\text{id}_S} & & (D_2) & & \uparrow{\scriptstyle \text{Sh}} \\
\Gamma^R(A)\otimes_R S & \xrightarrow{\quad \nu \quad} & & & \Gamma^S(A\otimes_R S)
\end{array}$$

$\hat{\nu}$ sei dabei durch das Diagramm (D_2) definiert, ist also der eindeutig bestimmte S-Modul -Hom. , so daß (D_2) kommutativ wird.

Mit f sei der Hom.(22) aus [Bou 74] II§3.7. bezeichnet, der im allgemeinen kein Isomorphismus ist.

12.2.1.SATZ: a) Obiges Diagramm ist kommutativ in S-MOD.

b) $\hat{\nu}^{RS}$ ist S-Algebra-Hom.

c) $\hat{\Gamma}^R(A)\otimes_R S \underset{\hat{\nu}}{\cong} \hat{\Gamma}^S(A\otimes_R S)$ als S-Algebra.

BEW.: a) $\Gamma^R(A)\otimes S$ wird als S-Modul erzeugt von den Elementen

$$x := \prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}\otimes 1_S \cdot (\nu_i)_i \circ f((\prod_{i\ I} a_i^{[\alpha_i]}\ 1_A^{[1-|\alpha|]})_{l\geq 0}\otimes 1_S) =$$

$$= (\nu_i)_i(((\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}\ 1_A^{[1-|\alpha|]})\otimes 1_S)_{l\geq 0}) =$$

$$= (\prod_{i\in I}(a_i\otimes 1_S)^{[\alpha_i]}(1_A\otimes 1_S)^{[1-|\alpha|]})_{l\geq 0} \cdot$$

$\nu(x) = \prod_{i\in I} a_i\otimes 1_S^{[\alpha_i]}$. Es folgt die Behauptung.

b) $\hat{\nu}((\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}\otimes 1_S)\tau(\prod_{j\in J} b_j^{<\beta_j>}\otimes 1_S)) =$

$$= \sum_{(\zeta_{ij})\in \hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} \hat{\nu}((\prod_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j^{<\zeta_{ij}>}\ \prod_{i\in I} a_i^{<\zeta_{i0}>}\ \prod_{j\in J} b_j^{<\zeta_{0j}>})\otimes 1_S) =$$

$$= \sum_{(\zeta_{ij})} Sh\circ\nu((\prod_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j^{[\zeta_{ij}]}\ \prod_{i\in I} a_i^{[\zeta_{i0}]}\ \prod_{j\in J} b_j^{[\zeta_{0j}]})\otimes 1_S) =$$

$$= \sum_{(\zeta_{ij})} \prod_{(i,j)\in I\times J}(a_i b_j\otimes 1_S)^{[\zeta_{ij}]}\ \prod_{i\in I}(a_i\otimes 1_S)^{[\zeta_{i0}]}\ \prod_{j\in J}(b_j\otimes 1_S)^{[\zeta_{0j}]} .$$

Es folgt die Behauptung.

c) Folgt aus b) und der Tatsache, daß $\hat{\nu}$ S-Modul-Iso. ist. ■

12.2.2.LEMMA: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ kommutiert (D_3) in S-ALG :

(D_3)

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}^R(A)\otimes_R S & \xrightarrow{\quad\hat{\nu}\quad} & \hat{\Gamma}^S(A\otimes_R S) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_k\otimes id_S} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_k} \\ \Gamma_k^R(A)\otimes_R S & \xrightarrow{\quad\nu_k\quad} & \Gamma^S(A\otimes_R S) \end{array}$$

BEW.: $\pi_k \circ \hat{\nu}(a^{<i>} \otimes 1_S) = (a \otimes 1_S)^{<i>}(1_A \otimes 1_S)^{<k-i>}$

$\nu_k \circ (\pi_k \otimes id_S)(a^{<i>} \otimes 1_S) = \nu_k(a^{<i>} 1_A^{<k-i>} \otimes 1_S)$

Die Behauptung folgt, da alle Abbildungen S-Algebra-Hom. sind (3.1.10.). ■

KAPITEL 13 : Der Funktor $\hat{\Gamma}$ für Algebren ohne 1.

13.1. A^+ sei eine R-Algebra ohne Eins, d.h. A^+ ist ein R-Modul, für den ein R-Modul-Hom. $\mu_{A^+} : A^+ \otimes A^+ \longrightarrow A^+$ gegeben ist, der die übliche Assoziativitätsforderung erfüllt.
Dann trägt $A := A^+ \oplus R$ die Struktur einer R-Algebra mit Eins $1_A = (0, 1_R)$, wenn man die Multiplikation definiert durch
$(a,r) \cdot (b,s) := (ab+as+br, rs) \quad \forall a,b \in A^+$ und $\forall r,s \in R$. (*)
Da $A^+ \oplus R$ mit komponentenweiser Multiplikation auch eine R-Algebra ist, wenn auch ohne Eins, wird, falls zur Unterscheidung nötig, A mit obiger Struktur(*) gelegentlich als $A^+ \hat{\oplus} R$ geschrieben.
Hat man umgekehrt eine R-Algebra B gegeben, deren Eins $\eta_B : R \longrightarrow B$ ein aufspaltender Monomorphismus in R-ALG ist, etwa $pr \circ \eta_B = id_R$, so gilt: $B = B^+ \oplus R$ mit $B^+ := Kern(pr)$ Ideal. Man hat dann genau obige Situation.
Seien A^+ und A wie oben. Die kanonische Einbettung $\iota_A^+ : A^+ \to A$ ist dann im Gegensatz zur kanonischen Projektion $\pi_A^+ : A \to A^+$ R-Algebra-Hom. (ohne 1).
$\Gamma(A^+)$ ist direkter Summand von $\Gamma(A)$ via $\Gamma(\iota_A^+)$.

13.1.1.DEF.: $\hat{\Gamma}(A^+) := Sh \circ \Gamma(\iota_A^+)(\Gamma(A^+))$; $Sh^+ := Sh\ \Gamma(\iota_A^+)\big|_{\Gamma(A^+),\hat{\Gamma}(A^+)}$

13.1.2.LEMMA: $\hat{\Gamma}(A^+)$ ist R-Subalgebra (mit Eins !) von $\hat{\Gamma}(A)$.

BEW.: $\Gamma_0(A^+) \ni 1_R \xmapsto[\Gamma(\iota_A^+)]{} 1_R\ (\in \Gamma_0(A)) \xmapsto[Sh]{} 1_{\hat{\Gamma}(A)}$.

Daß $\hat{\Gamma}(A^+)$ multiplikativ abgeschlossen ist, folgt aus 9.1.3., da A^+ Ideal in A ist. ■

13.1.3.DEF.: Für alle $k \in \mathbb{N}_o$ sei $\hat{\Gamma}_k(A^+) := Sh^+(\Gamma_k(A^+))$.

13.1.4. $\hat{\Gamma}(A^+) \underset{Sh^+}{\cong} \Gamma(A^+)$ u. $\hat{\Gamma}(A^+) \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_o} \hat{\Gamma}_k(A^+)$ als R-Moduln.

13.1.5.DEF.: $\mathfrak{F}_n^+ := \bigoplus_{i \geq n} \hat{\Gamma}_i(A^+)$ für alle $n \geq 0$.

13.1.6. Für alle $n \geq 0$ ist $\mathfrak{F}_n^+ = \mathfrak{F}_n \cap \hat{\Gamma}(A^+)$ und damit Ideal in $\hat{\Gamma}(A^+)$.

$\hat{\Gamma}(A^+)$ mit $(\mathfrak{F}_n^+)_{n \in \mathbb{N}_o}$ ist damit filtrierter Ring (filtrierte R-Algebra) im Sinne von [Nor 68].

13.1.7. Sind A^+ und B^+ R-Algebren ohne Eins, $\psi: A^+ \longrightarrow B^+$ R-Modul-Hom. und $\overline{\psi} := (\psi, id_R): A := A^+ \oplus R \longrightarrow B^+ \oplus R =: B$, dann gilt:

1) $\hat{\Gamma}(\overline{\psi})(\hat{\Gamma}(A^+)) \subset \hat{\Gamma}(B^+)$

2) $\hat{\Gamma}(\overline{\psi})\big|_{\hat{\Gamma}(A^+),\hat{\Gamma}(B^+)} = (\Gamma_i(\overline{\psi}))_i\big|_{\hat{\Gamma}(A^+),\hat{\Gamma}(B^+)} = Sh^+ \circ \Gamma(\psi) \circ (Sh^+)^{-1}$

3) Ist ψ R-Algebra-Hom. ohne Eins, so ist $\overline{\psi}$ R-Algebra-Hom. (mit Eins) und $\hat{\Gamma}(\overline{\psi})\big|_{\hat{\Gamma}(A^+),\hat{\Gamma}(B^+)}$ ist R-Algebra-Hom. (mit 1).

BEW.: 3) folgt wegen 1) und 2) aus 9.1.8..

1) und 2) folgen mit 9.1.8. aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(A^+) & \xrightarrow{\Gamma(\psi)} & \Gamma(B^+) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma(\iota_A^+)} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(\iota_B^+)} \\ \Gamma(A) & \xrightarrow{\Gamma(\overline{\psi})} & \Gamma(B) \end{array}$$

■

13.1.8.DEF.: Für einen R- Modul -Hom. $\psi:A^+ \longrightarrow B^+$ zwischen R-Algebren ohne Eins sei $\hat{\Gamma}(\psi) := \hat{\Gamma}(\overline{\psi})\big|_{\hat{\Gamma}(A^+),\hat{\Gamma}(B^+)}$.

$\hat{\Gamma}$ ist somit auch Funktor von den R-Algebren ohne Eins in die R-Algebren mit Eins (13.1.7. 3)).

13.1.9. a) Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und für alle $x = \prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A^+)$ gilt: $(\Gamma_i(\pi_A^+))_i \circ Sh^+(x) = x$.

b) $(\Gamma_i(\pi_A^+))_i\big|_{\hat{\Gamma}(A^+),\Gamma(A^+)} = (Sh^+)^{-1}$.

BEW.: $(\Gamma_i(\pi_A^+))_i((\prod_{i\in I}(a_i,0)^{[\alpha_i]}(0,1_R)^{[1-k]})_1) = \prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}$, da $\pi_A^+((0,1_R)) = 0$. a) und b) folgen. ■

13.2. $\pi := \pi_A^\circ : A = A^+ \oplus R \longrightarrow R$ sei die kan. Projektion. π ist R-Algebra-Hom. Mit dem R-Alg.-Hom. L aus 8.2. hat man:

$$\pi \in A^* \cong \Gamma_1(A)^* \hookrightarrow \Gamma(A)^* \xrightarrow[L]{} End(\Gamma(A)).$$

Es bleibt nachzutragen:

13.2.1.LEMMA: Für alle R-Moduln M ist $L:(\Gamma(M)^*,*) \longrightarrow (End(\Gamma(M)),\circ)$ ein R-Algebra-Monomorphismus.

BEW. der Injektivität: Für $f\in\Gamma(M)^*$ mit $L_f\equiv 0$ gilt:

1) $0=L_f(1_{\Gamma(M)})=1_{\Gamma(M)}\cdot f(1_{\Gamma(M)})=f(1_{\Gamma(M)}) \Longrightarrow f(\Gamma_0(M))=0$, da $1_{\Gamma(M)}=1_R$ und $\Gamma_0(M)=R$ ist.

2) $0=L_f(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}) = (\prod_i m_i^{[\alpha_{i1}]}) f(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_{i2}]}) + 1\, f(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]})$

Dabei läuft die Summe über alle $(\alpha_{ij})_{i\in I;j\in\underline{2}}$ mit $\alpha_{i1}+\alpha_{i2}=\alpha_i$ für alle $i\in I$ und $(\alpha_{i2})_i\neq(\alpha_i)_i$.
Aus der letzten Bedingung folgt $\sum_{i\in I}\alpha_{i2}<\sum_{i\in I}\alpha_i$.
Mit 1) als Induktionsanfang folgt induktiv , daß für alle $i\in\mathbb{N}_0$ $f(\Gamma_i(M))=0$ ist. Es folgt: $f\equiv 0$. ■

Sei $\{a_i\}_{i\in I}$ Erzeugendensystem des R-Moduls A^+. Dann ist $\{a_i\}_{i\in I}\dot\cup\{1_A\}$ Erzeugendensystem von A und $\Gamma(A)$ wird als R-Modul erzeugt von Elementen der Form $(\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})1_A^{[\beta]}$.

Im Folgenden sei π^k die k-te Potenz von π in der Convolutionsalgebra $\Gamma(M)^*$, also eigentlich π^{*k}.

$$L(\pi^k)((\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})1_A^{[\beta]}) =$$

$$=\mu_{k-1}\circ(id_{\Gamma(A)}\underbrace{\otimes\pi\otimes\ldots\otimes\pi}_{k\text{-mal}})\circ\Delta_{k-1}((\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})1_A^{[\beta]}) =$$

$$=\sum_{\substack{(\alpha_{i0}+\alpha_{i1}+\ldots+\alpha_{ik}=\alpha_i)\,\forall i\\ \beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_k=\beta\\ \beta_j+\sum_{i\in I}\alpha_{ij}=1\ \forall j\in\underline{k}}} (\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_{i0}]})1_A^{[\beta_0]} \prod_{j\in\underline{k}} \pi((\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_{ij}]})1_A^{[\beta_j]})$$

Ein einzelner Summand ist nur dann von 0 verschieden, wenn für alle $j\in\underline{k}$ $\pi((\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_{ij}]})1_A^{[\beta_j]})=\pi(1_A^{[1]})$ ist, wenn also gilt: $\alpha_{ij}=0\ \forall i,j$ und $\beta_j=1\ \forall j\in\underline{k}$.

<u>13.2.2.</u> a) $L(\pi^k)((\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})1_A^{[\beta]}) = (\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})1_A^{[\beta-k]}$

b) $L(\pi^k)(\Gamma_i(A))\subset\Gamma_{i-k}(A)$

c) Jedes Element aus $\Gamma_n(A)$ ist eindeutig darstellbar als $\sum_{i\in\underline{n}_o} \pi_n \circ Sh(x_i) = \sum_{i\in\underline{n}_o} x_i \cdot 1_A^{[i]}$ mit $x_i \in \Gamma_{n-i}(A^+)$.

BEW.: a) ist nach Obigem klar; b) folgt aus a);

c) Es reicht zu zeigen: $\sum_{i\in\underline{n}_o} x_i \cdot 1_A^{[i]} = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \forall i\in\underline{n}_o$.

Annahme: Es existiert $k := \max\{i\in\underline{n}_o \mid x_i \neq 0\}$. Dann gilt:

$0 = L(\pi^k)(0) = L(\pi^k)(\sum_{i\in\underline{n}_o} x_i \cdot 1_A^{[i]}) = x_k$ nach a). Widerspruch. ■

13.2.3.DEF.: $\pi_{ij} := L(\pi^{(i-j)}) \big|_{\Gamma_i(A),\Gamma_j(A)}$ für $i \geq j \geq 0$.

13.2.4.LEMMA: $\forall k \geq l \geq 0$:

a) $\pi_{kl} \circ \pi_k \big|_{\hat{\Gamma}(A^+)} = \pi_l \big|_{\hat{\Gamma}(A^+)}$ $\qquad (\pi_i : \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \Gamma_i(A)$ kan.Epi.)

b) $\pi_{kl} : (\Gamma_k(A),\tau) \longrightarrow (\Gamma_l(A),\tau)$ ist R-Algebra-Hom..

BEW.: a) Folgt leicht aus 13.2.2.a) ;

b) Nach 13.2.2.c) ist jedes Element von $\Gamma_k(A)$ Linearkombination von Elementen $\pi_k(x)$.

$\pi_{kl}(\pi_k(x)\tau\pi_k(y)) \underset{\pi_k \text{ Alg.-Hom.}}{=} \pi_{kl}\circ\pi_k(x\tau y) \underset{a)}{=} \pi_l(x\tau y) \underset{Alg.-H.}{=} \pi_l(x)\tau\pi_l(y) \underset{a)}{=} \pi_{kl}(\pi_k(x))\tau\pi_{kl}(\pi_k(y))$. ■

Aus 13.2.2.a) entnimmt man, daß die $((\Gamma_i(A))_{i\in\mathbb{N}_o}; (\pi_{ij})_{i\geq j\geq 0})$ ein inverses System bilden. Nach 13.2.4.b) kann man

$E := \varprojlim_n (\Gamma_i(A),\tau)$ in R-ALG bilden.

Aus 13.2.4.a) folgt:

13.2.5. $\hat{\Gamma}(A^+) \subset E$.

13.2.6.SATZ: $\lim_{\leftarrow n} (\Gamma_n(A),\tau)$ in R-ALG ist die Vervollständigung der durch $(\mathfrak{F}_n^+)_n$ filtrierten R-Algebra $\hat{\Gamma}(A^+)$.

BEW.: Vgl. [Nor 68]wegen der Konstruktion der Vervollständigung (dort nur Ring!). Zeigt man, daß $\hat{\Gamma}(A^+)/\mathfrak{F}_{n+1}^+ \cong \Gamma_n(A)$ ist, so überzeugt man sich leicht, daß die σ_i von [Nor 68] gerade mit den π_{ii-1} aus 13.2.3. übereinstimmen. Die Behauptung folgt also aus dem folgenden Satz. ■

13.2.7.SATZ: Für alle $n\in\mathbb{N}_o$ ist $\hat{\Gamma}(A^+)/\mathfrak{F}_{n+1}^+ \cong (\Gamma_n(A),\tau)$ als R-Algebra.

BEW.: 1) $h: \hat{\Gamma}(A^+)/\mathfrak{F}_{n+1}^+ \overset{13.1.4.}{\cong} \bigoplus_{i\in\underline{n}_o} \Gamma_i(A^+) \cong \bigoplus_{i\in\underline{n}_o} (\Gamma_i(A^+)\otimes R) \cong \bigoplus_{i\in\underline{n}_o} (\Gamma_i(A^+)\otimes\Gamma_{n-i}(R)) \overset{A.III.1.}{\cong} \Gamma_n(A^+\oplus R)$ als R-Modul.

Für $\prod_i a_i^{<\alpha_i>} \in \hat{\Gamma}_k(A^+)$ mit $k\in\underline{n}_o$ ergibt sich explizit:

$$h: \prod_i a_i^{<\alpha_i>}+\mathfrak{F}_{n+1}^+ \longmapsto \prod_i a_i^{[\alpha_i]} \longmapsto \prod_i a_i^{[\alpha_i]}\otimes 1_R^{[n-k]} \longmapsto (\prod_i (a_i,0)^{[\alpha_i]})(0,1_R)^{[n-k]}$$

2) $\varepsilon_{n+1}:\hat{\Gamma}(A^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A^+)/\mathfrak{F}_{n+1}^+$ sei der kan. R-Algebra-Epi..

$$h\circ\varepsilon_{n+1}\left(\prod_i a_i^{<\alpha_i>}\right) = \begin{cases} 0 \text{ falls } |\alpha|>n \\ (\prod_i (a_i,0)^{[\alpha_i]})(0,1_R)^{[n-|\alpha|]} \text{ sonst} \end{cases}$$

Definiere $f:\hat{\Gamma}(A^+) \hookrightarrow \hat{\Gamma}(A) \xrightarrow{\pi_n} (\Gamma_n(A),\tau)$. f ist dann ein R-Algebra-Hom.. $f(\prod_i a_i^{<\alpha_i>}) = \pi_n(\prod_i (a_i,0)^{<\alpha_i>}) =$

$$= (\prod_i (a_i,0)^{[\alpha_i]})1_A^{[n-|\alpha|]} = (\prod_i (a_i,0)^{[\alpha_i]})(0,1_R)^{[n-|\alpha|]}.$$

Somit gilt: $f = h\circ\varepsilon_{n+1}$. Da f, ε_{n+1} R-Algebra-Hom. sind, und ε_{n+1} Epimorphismus ist, folgt, daß auch h R-Algebra-Hom. ist. ∎

13.2.8.KOR. zum Beweis: $\pi_n\big|_{\hat{\Gamma}(A^+)}:\hat{\Gamma}(A^+) \longrightarrow (\Gamma_n(A),\tau)$ ist R-Algebra-Epimorphismus mit Kern $\mathfrak{F}^+_{n+1}$.

BEW.: Betrachte f im Beweis von 13.2.7.. ∎

Die Aussage von 13.2.6. läßt sich "verbessern", wenn A sogar die Struktur einer graduierten R-Algebra trägt.

13.2.9.SATZ: Ist $A^+ = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$, so daß mit $A_0 := R$ die Algebra $A = A^+\hat{\oplus}R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} A_i$ eine graduierte R-Algebra ist, dann ist für jedes $n\in\mathbb{N}_o$ $(\Gamma_n(A),\tau) = (\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} B_{nj},\tau)$ mit

$B_{nj} := \xi^{-1}(\bigoplus_{\{\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}_o}\,|\,|\alpha|=n\}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_{\alpha_i}(A_i))$ graduierte R-Algebra.

(Vgl. Anhang III wegen erweiterter Def. von ξ)

Die Abbildungen $\pi_{ij}:\Gamma_i(A) \longrightarrow \Gamma_j(A)$ $(i\geq j)$ sind Homomorphismen graduierter R-Algebren.

Ist $B_j := Sh\,\xi^{-1}(\bigoplus_{\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(A_i))$, so ist $B_j = \lim_{\overleftarrow{n}}(B_{nj})$ bezüglich der Familie $(\pi_{rs}\big|_{B_{rj}},B_{sj})_{r\geq s}$ in R-MOD.

$\hat{\Gamma}(A^+) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} B_j$ ist graduierte R-Algebra, und die kan. Projektionen $\pi_n:\hat{\Gamma}(A^+) \longrightarrow \Gamma_n(A)$ sind Homomorphismen graduierter R-Algebren

13.2.10.BEM.: $\hat{\Gamma}(A^+) = \varprojlim_{n}(\Gamma_n(A))$ bzgl. der Familie $(\pi_{nm})_{n\geq m}$ in der Kategorie der graduierten R-Algebren.

BEW. von 13.2.9.:a) Nach A.III.6. ist $\Gamma_n(A) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} B_{nj}$.

Ein Element $x := \prod_{i\in\mathbb{N}_o} \prod_{k\in K_i} a_{ik}^{[\alpha_{ik}]}$ (K_i Indexmengen) ist genau dann aus B_{nr}, wenn 1) $k\in K_i \Longrightarrow a_{ik}\in A_i$; 2) $\sum_{i\in\mathbb{N}_o} \sum_{k\in K_i} \alpha_{ik} = n$;

3) $\sum_{i\in\mathbb{N}_o} i \sum_{k\in K_i} \alpha_{ik} = r$.

B_{nr} ist Linearkombination von Elementen dieser Form.

Sei $y := \prod_{j\in\mathbb{N}_o} \prod_{l\in L_j} b_{jl}^{[\beta_{jl}]} \in B_{ns}$. $z := x \tau y =$

$$= \sum_{(\zeta_{(i,k)(j,l)})\in M((\alpha_{ik})_{(i,k)};(\beta_{jl})_{(j,l)})} \prod_{(i,k)} \prod_{(j,l)} a_{ik}b_{jl}^{[\zeta_{(i,k)(j,l)}]}.$$

$a_{ik}b_{jl}\in A_{i+j} \Longrightarrow \prod_{(i,k)} \prod_{(j,l)} a_{ik}b_{jl}^{[\zeta_{(i,k)(j,l)}]} =$

$$= \prod_{t\in\mathbb{N}_o} \prod_{\{((i,k),(j,l))\,|\,i+j=t\}=:V_t} a_{ik}b_{jl}^{[\zeta_{(i,k)(j,l)}]}.$$

1') $((i,k),(j,l))\in V_t \Longrightarrow a_{ik}b_{jl}\in A_t$;

2') $\sum_{t\in\mathbb{N}_o} \sum_{((i,k),(j,l))\in V_t} \zeta_{(i,k)(j,l)} = \sum_{(i,k)} \sum_{(j,l)} \zeta_{(i,k)(j,l)} =$

$$= \sum_{(i,k)} \alpha_{ik} = n;$$

3') $\sum_{t\in\mathbb{N}_o} t \sum_{((i,k),(j,l))\in V_t} \zeta_{(i,k)(j,l)} = \sum_{(i,k)} \sum_{(j,l)} (i+j)\zeta_{(i,k)(j,l)} =$

$$= \Big(\sum_{(i,k)} i \sum_{(j,l)} \zeta_{(i,k)(j,l)}\Big) + \Big(\sum_{(j,l)} j \sum_{(i,k)} \zeta_{(i,k)(j,l)}\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{(i,k)} i\alpha_{ik}\Big) + \Big(\sum_{(j,l)} j\beta_{jl}\Big) = r+s$$

z ist also aus B_{nr+s} und $\Gamma_n(A)$ damit graduierte R-Algebra.

b) Nach A.III.7. ist $\Gamma(A^+) = \xi^{-1}\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \bigoplus_{\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(A_i) \right)$.

Es folgt: $\hat{\Gamma}(A^+) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} B_j$.

Daß $\hat{\Gamma}(A^+)$ so graduierte Algebra wird, rechnet man ähnlich wie oben nach.

c) Daß π_{nm} graduiert ist vom Grad 0, ist, da π_{nm} nur auf die A_0-Komponente wirkt (i=0 in a)3)) und somit den Grad nicht ändert (r in a)3)), klar.

d) $\lim_{\longleftarrow n}(B_{nj}) \subset \prod_n B_{nj} \subset \prod_n \Gamma_n(A)$; $B_j \subset \hat{\Gamma}(A^+) \subset \prod_n \Gamma_n(A)$.

Beh.: $\lim(B_{nj}) = B_j$

1) $x\in B_j \Longrightarrow x=Sh(x')$ mit $x'=\xi^{-1}(x")$, wobei x" Linearkomb. von Elementen $x"_\alpha \in \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(A_i)$ ist, mit $\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}$. Also ist $\xi^{-1}(x"_\alpha) \in B_{|\alpha|j}$ und $\pi_{|\alpha|i}(\xi^{-1}(x"_\alpha))=0 \quad \forall i<|\alpha|$, da A_0 in x" nicht vertreten ist. $Sh(\xi^{-1}(x"_\alpha))$ ist dann ein Element aus $\prod_n B_{nj}$, das sicher zu $\lim(B_{nj})$ gehört. Also ist $x\in\lim(B_{nj})$.

2) $x=(X_n)_n \in \lim(B_{nj})$ mit $x_n\in B_{nj}$.

x_n hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Elementen $x_{n\alpha}\in\xi^{-1}\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{N}_0} \Gamma_{\alpha_i}(A_i)\right)$ mit $\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}_0}$ und $|\alpha|=n$.

r_α sei der Koeffizient von $x_{n\alpha}$.

$\max\{n|\exists x_{n\alpha}:\alpha_0=0\}\leq j$, da dann $n=\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} i\alpha_i = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} i\alpha_i = j$.

Die endlich vielen $Sh(x_{n\alpha})$ mit $\alpha_0=0$ sind ihrerseits in $\lim(B_{nj})$ enthalten, was damit auch für $y:=x-\sum_n \sum_{\{\alpha|\alpha_0=0\}} r_\alpha Sh(x_{n\alpha})$ gilt.

Existierte ein n mit $y_n\neq 0$, so wäre nach 13.2.2.c) $y_n=\sum_i z_i\cdot 1^{[i]}$ mit $z_i\in\Gamma_{n-i}(A^+)$. Für $k:=\max\{i|z_i\neq 0\}$ wäre dann

$y_{n-k} = \pi_{n\ n-k}(y_n) = z_k \in \Gamma_{n-k}(A^+)$, im Widerspruch dazu, daß alle $x_{n\alpha}$ mit $\alpha_0=0$ bereits subtrahiert wurden. Also ist x Linearkombination der $Sh(x_{n\alpha}) \in B_j$. ■

13.2. Im Beweis von 13.2.7. wurde ein Isomorphismus h definiert. Die Form dieses Isomorphismus legt folgende allgemeinere Betrachtung nahe.

M sei ein R-Modul. Für alle $k \in \mathbb{N}_o$ hat man einen Isomorphismus

$$\underline{\underline{h_k}}: \bigoplus_{i \in \underline{k}_o} \Gamma_i(M) \cong \bigoplus_{i \in \underline{k}_o} (\Gamma_i(M) \otimes \Gamma_{k-i}(R)) \cong \Gamma_k(M \oplus R). \quad \text{(A.III.1)}$$

Für $\prod_i m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_j(M)$ gilt: $h_k(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}) = (\prod_i (m_i,0)^{[\alpha_i]})(0,1_R)^{[k-|\alpha|]}$.

$$\underline{\underline{\tilde{h}_j}}: \Gamma_j(M) \longrightarrow \prod_{\substack{\text{Einb.} \\ k}} (\bigoplus_{k \geq j} \bigoplus_{i \in \underline{k}} \Gamma_i(M)) \longrightarrow \prod_{k \geq j} \Gamma_k(M \oplus R) \quad \text{erlaubt es,}$$

$$\underline{h}: \Gamma(M) \longrightarrow \prod_{j \geq 0} \Gamma_j(M \oplus R) \quad \text{als} \quad h := \bigoplus_{j \geq 0} \tilde{h}_j \quad \text{zu definieren.}$$

13.3.1. Für alle $l \in \mathbb{N}_o$ kommutiert das folgende Diagramm:

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M) & \xrightarrow{\quad h \quad} & \prod_{j \geq 0} \Gamma_j(M \oplus R) \\ \uparrow & & \downarrow \pi_1 \\ \bigoplus_{i \in \underline{l}_o} \Gamma_i(M) & \xrightarrow{\quad h_l \quad} & \Gamma_l(M \oplus R) \end{array}$$

BEW.: Auf $\Gamma_i(M)$ stimmt h mit $\tilde{h}_i$ überein. $x \in \Gamma_i(M) \Longrightarrow \tilde{h}_i(x) = (h_k(x))_{k \geq i}$. Der Rest ist klar. ■

Betrachte $\pi_1 \circ h$: $\quad \pi_1 \circ h \left(\prod_{i \in I} m_i^{[\alpha_i]} \right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |\alpha| > 1 \\ h_1(x) & \text{sonst.} \end{cases}$

13.3.2. $\pi_1 \circ h: \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma_1(M \oplus R)$ liefert das Polynomgesetz $m \longmapsto (m, 1_R)^{[1]}$ von M nach $\Gamma_1(M \oplus R)$.

BEW.: $\sum_{i\geq 0} \pi_1 \circ h(m^{[i]}) = \sum_{i\in \underline{1}_\circ} h_1(m^{[i]}) = \sum_{i\in \underline{1}_\circ} (m,0)^{[i]} (0,1_R)^{[1-i]} = (m,1_R)^{[i]}$. ∎

Der R-Modul-Hom. $\overline{\overline{h}}$ sei folgendermaßen definiert:

$$\overline{h} : \prod_{i\geq 0} \Gamma_i(M) \xrightarrow[x \to x\otimes(1_R^{[i]})_i]{} \prod_{i\geq 0} \Gamma_i(M) \otimes \prod_{i\geq 0} \Gamma_i(R) \xrightarrow[\overline{\xi}]{1.3.3.} \prod_{i\geq 0} \Gamma_i(M\oplus R)$$

$\overline{h}$ faktorisiert natürlich sogar über $\prod_i \Gamma_i(M) \otimes \Gamma(R)$.

Für $\prod_{l\in L_i} m_{il}^{[\alpha_{il}]} \in \Gamma_i(M)$ ($i\geq 0$) gilt:

$$\overline{h}\Big(\big(\prod_{l\in L_i} m_{il}^{[\alpha_{il}]}\big)_{i\geq 0}\Big) = \Big(\sum_{i+j=k} \big(\prod_{l\in L_i} (m_{il},0)^{[\alpha_{il}]}\big)(0,1_R)^{[j]}\Big)_{k\geq 0}$$

Damit ist auch eine elegantere Darstellung von h gefunden.

13.3.3. a) $\overline{h}\big|_{\Gamma(M)} = h$ (klar!)

b) Ist M=B R-Algebra, so ist $\overline{h}$: $\prod_{i\geq 0} (\Gamma_i(B),\tau) \longrightarrow \prod_{i\geq 0} (\Gamma_i(M\oplus R),\ )$ R-Algebra-Hom. (vgl.3.1.13.).

Anwendungen:

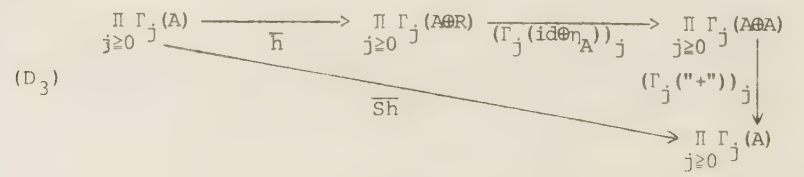
a) A^+ sei eine R-Algebra ohne Eins.

$h:\Gamma(A^+) \longrightarrow \prod_{j\geq 0} \Gamma_j(A^+\oplus R)$ bildet ab:

$$\prod_i a_i^{[\alpha_i]} \longmapsto \Big(\big(\prod_i (a_i,0)^{[\alpha_i]}\big)(0,1_R)^{[1-|\alpha|]}\Big)_{1\geq 0} .$$

Da für $A=A^+\hat{\oplus}R$ $(0,1_R)=1_A$ ist, ist also h eingeschränkt auf sein Bild gerade gleich Sh^+.

b) A sei eine R-Algebra mit Eins $\eta_A: R \longrightarrow A$.



Diese Komposition bildet folgendermaßen ab:

$$\Big(\prod_{l\in L_i} a_{il}^{[\alpha_{il}]}\Big)_{i\geq 0} \longrightarrow \Big(\sum_{i+j=k}\ \prod_{l\in L_i} (a_{il},0)^{[\alpha_{il}]}\Big)(0,1_R)^{[j]}\Big)_{k\geq 0} \longrightarrow$$

$\Big(\sum_{i+j=k}\Big(\prod_{l\in L_i} a_{li}^{[\alpha_{il}]}\Big)1_A^{[j]}\Big)_{k\geq 0}$. Die Einschränkung auf $\Gamma(A)$ im Urbild und auf das Bild von $\Gamma(A)$ ist demnach gerade Sh.Die Bezeichnung $\overline{Sh}$ für die Komposition in (D_3) ist daher gerechtfertigt. Man erhält sofort folgende Aussagen:

<u>13.3.4.</u> a) $\overline{Sh}((a^{[i]})_{i\geq 0}) = \Big(\sum'_{i+j=k} a^{[i]}1_A^{[j]}\Big)_{k\geq 0} = ((a+1_A)^{[k]})_k$

b) Für $k\in\mathbb{N}_0$ liefert $\pi_k\circ Sh:\Gamma(A) \longrightarrow \Gamma_k(A)$ das Polynomgesetz $a \longmapsto (a+1)^{[k]}$ von A nach $\Gamma_k(A)$.

<u>13.4.</u> Ist A^+ freier R-Modul mit abzählbarer Basis , so kann man wie in 9.2. "multiplikative" Basen von $\hat{\Gamma}(A^+)$ angeben.

<u>13.4.1.SATZ:</u> Ist $B=\{a_1<a_2<\ldots\}$ Basis der R-Algebra A^+ ohne Eins als R-Modul, dann ist folgende Menge Basis von $\hat{\Gamma}(A^+)$:

$C:=\{a_1^{<\alpha_1>}\tau a_2^{<\alpha_2>}\tau\ldots \mid 0\leq|\alpha|<\infty\}$.

<u>BEW.:</u> $A=A^+\hat{\oplus}R$ hat die Basis $\{1_R<a_1<a_2<\ldots\}$. Ist $F\in End(\hat{\Gamma}(A))$ der Isomorphismus aus dem Beweis von 9.2.11., so gilt:

$F(a_1^{<\alpha_1>}a_2^{<\alpha_2>}\ldots.) = a_1^{<\alpha_1>}\tau a_2^{<\alpha_2>}\tau\ldots$.

Wendet man jetzt 9.2.5. mit (A3) an mit $E:=\{a_i\}_i$, so ergibt sich: $F(a_1^{<\alpha_1>}\ldots a_k^{<\alpha_k>}) = a_1^{<\alpha_1>}\ldots a_k^{<\alpha_k>}$ + R-Linearkomb. von Elementen $c\in C''$ (Def. klar) und $c<a_1^{<\alpha_1>}\ldots a_k^{<\alpha_k>}$. Wie in

9.2.11. folgt die Beh. mit A.I.1.. ■

13.4.2.SATZ: Ist R ein Körper der Charakteristik 0 und A^+ eine R-Algebra ohne Eins, und ist $B=\{a_1<a_2<...\}$ eine Basis des R-Moduls A^+, so ist die folgende Menge Basis von $\hat{\Gamma}(A^+)$:

$$C:=\{a_{i_1}^{<1>}\tau...\tau a_{i_k}^{<1>} \mid k\in\mathbb{N}_o;\ i_1\leq i_2\leq...\leq i_k\}\ .$$

BEW.: $A=A^+\oplus R$ hat die Basis $\{1_R<a_1<a_2<...\}$. Der Iso. F aus dem Beweis von 9.2.12. bildet das Element $a_{i_1}^{<1>}...a_{i_k}^{<1>}$ ab auf $a_{i_1}^{<1>}\tau...\tau a_{i_k}^{<1>}$. Wie bei 9.2.12. folgt die Behauptung aus 9.2.5. mit (A1) für $E:=\{a_i\}_i$ und A.I.1.. ■

13.4.3.SATZ: Ist R ein Körper der Charakteristik $p>0$ und A^+ eine R-Algebra ohne Eins, und hat der R-Modul A^+ die Basis $B=\{a_1<a_2<...\}$, so ist die Menge

$$C:=\{\ \tau_{i\ h\geq 0}\ \tau^{\alpha_{ih}}\ (a_i^{<p^h>}) \quad \mid 0\leq\alpha_{ih}<p\ ;\ \sum_{i,h}\alpha_{ih}<\infty\}\ \text{Basis von}\ \hat{\Gamma}(A^+).$$

BEW.: Analog zu 9.2.13. mit Modifikationen wie oben. ■

KAPITEL 14 : Die Cogebra-Struktur von $\Gamma(M)$ als Algebra-Homomorphismus $\Gamma(M)\longrightarrow\hat{\Gamma}(\Gamma^+(M))$ und ihre Übertragung auf $\hat{\Gamma}(A)$.

14.1. Neben der R-Algebra-Struktur trägt $\Gamma(M)$ auch noch eine Cogebra-Struktur, die $\Gamma(M)$ sogar zur Bigebra macht (vgl. 1.3.9.). Liefert $\Delta=\Delta_1:\Gamma(M)\longrightarrow\Gamma(M)\otimes\Gamma(M)$ die Cogebra-Struk-

tur auf $\Gamma(M)$, so erhält man daraus durch Iteration in üblicher Weise Homomorphismen $\Delta_{i-1}:\Gamma(M) \longrightarrow T_i(\Gamma(M))$. Da $\Gamma(M)$ cokommutativ ist, liegen die Bilder sogar in der Teilmenge $Sym_i(\Gamma(M)) \subset T_i(\Gamma(M))$ der symmetrischen Tensoren. Wegen des engen Zusammenhangs von $Sym_i(\Gamma(M))$ mit $\Gamma_i(\Gamma(M))$ liegt der Versuch nahe, die Δ_i zu einem Homomorphismus von $\Gamma(M)$ nach $\Gamma(\Gamma(M))$ zusammenzufassen. Dies kommt dann in Kap.23 zur Anwendung. Die "richtige" Zusammenfassung ist tatsächlich ein R-Algebra-Hom. $\hat{\Delta}:\Gamma(M) \longrightarrow \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M))$, dessen Existenz im Folgenden bewiesen werden soll. Der Ansatz läßt, bei expliziter Kenntnis der Δ_i, die geeignete Definition vermuten.

Unter einer (Zahl-) Partition α von i ("α-i") soll im Weiteren eine Folge nicht-negativer ganzer Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ verstanden werden, für die gilt: $i= \sum_{j\in\mathbb{N}} j\alpha_j$. Für diese Menge wurde bereits die Bezeichnung $\tilde{P}_{i,\mathbb{N}}$ eingeführt(5.2.14).
Die Folge $\alpha:=(0,0,\ldots)$ liefert die einzige Partition von 0.

14.1.1.SATZ: $m \longmapsto \sum_{i\in\mathbb{N}_o} \left(\sum_{\alpha\vdash i} m[1]^{<\alpha_1>} m[2]^{<\alpha_2>} \ldots \right) T^i$ definiert eine R-Modul-Hom. von M nach $\varepsilon(\hat{\Gamma}(\Gamma^+(M)))$.
($\Gamma^+(M) := \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_j(M)$; $\hat{\Gamma}(\Gamma^+(M))$ ist kommutativ!)

BEW.: Zur Schreibvereinfachung werden zunächst einige Abkürzungen definiert. $U:= \mathbb{N}_o\times\mathbb{N}_o - 0$; $U_k:=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid p+q=k\}$;
$U_k^o:=\{(p,q)\in\mathbb{N}_o^2 \mid p+q=k\}$.

a) $x:= \sum_{\alpha\vdash i} m[1]^{<\alpha_1>} m[2]^{<\alpha_2>} \ldots \tau \sum_{\beta\vdash j} m[1]^{<\beta_1>} m[2]^{<\beta_2>} \ldots =$

$$= \sum_{\substack{\alpha\vdash i \\ \beta\vdash j}} \sum_{(\zeta_{pq})_{p,q}\in\hat{M}((\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}};(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}})} \prod_{(p,q)\in U} (m[p]_m[q])^{<\zeta_{pq}>} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \vdash i \\ \beta \vdash j}} \sum_{(\zeta_{pq})_{p,q}} \Big(\prod_{(p,q)\in U} [p,q]^{\zeta_{pq}} \Big) \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} [\zeta_{pq}]_{(p,q)\in U_k^\circ} \Big) \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} m[k]^{< \sum_{(p,q)\in U_k^\circ} \zeta_{pq} >} \Big)$$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} j \Big(\sum_{(p,q)\in U_j^\circ} \zeta_{pq} \Big) = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}_0 \mid p+q\geq 0\}} (p+q)\zeta_{pq} = \sum_{p\in\mathbb{N}} p \Big(\sum_{q\in\mathbb{N}_0} \zeta_{pq} \Big) +$$

$$+ \sum_{q\in\mathbb{N}} q \Big(\sum_{p\in\mathbb{N}_0} \zeta_{pq} \Big) = i+j \text{ . Also ist } \Big(\sum_{(p,q)\in U_k^\circ} \zeta_{pq} \Big)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto i+j \text{ .}$$

Ist umgekehrt $\gamma \vdash i+j$, so ermittelt sich der Koeffizient von

$m[1]^{<\gamma_1>} m[2]^{<\gamma_2>} \ldots$ in x zu:

$$Y := \sum_{\substack{\alpha \vdash i \\ \beta \vdash j}} \sum_{\{(\zeta_{pq})_{p,q} \in \hat{M}((\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}};(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}) \mid \sum_{(p,q)\in U_k^\circ} \zeta_{pq} = \gamma_k \ \forall k\in\mathbb{N}\}} \Big(\prod_{(p,q)\in U} [p,q]^{\zeta_{pq}} \Big) \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} [\zeta_{pq}]_{(p,q)\in U_k^\circ} \Big) =$$

$$= \sum_{\{(\zeta_{pq})_{(p,q)\in U} \mid \sum_{p\in\mathbb{N}} p(\sum_{q\in\mathbb{N}_0} \zeta_{pq}) = i;\ \sum_{q\in\mathbb{N}} q(\sum_{p\in\mathbb{N}_0} \zeta_{pq}) = j;\ \sum_{(p,q)\in U_k^\circ} \zeta_{pq} = \gamma_k \ \forall k\in\mathbb{N}\}} \prod_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Big(\prod_{(p,q)\in U_k^\circ} [p,q]^{\zeta_{pq}} \Big) [\zeta_{pq}]_{(p,q)\in U_k^\circ} \Big)$$

$[i,j]$ ist der Koeffizient bei $T_1^i T_2^j$ in $(T_1+T_2)^{i+j}$.

$$(T_1+T_2)^{i+j} = \prod_{r\in\mathbb{N}} (T_1+T_2)^{r\gamma_r} = \prod_{r\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{(p,q)\in U_k^\circ} [p,q] T_1^p T_2^q \Big)^{\gamma_r} =$$

$$= \prod_{r\in\mathbb{N}} \sum_{\{(\zeta_{pq})_{(p,q)\in U_k^\circ} \mid \sum_{(p,q)} \zeta_{pq} = \gamma_r\}} [\zeta_{pq}]_{(p,q)} \prod_{(p,q)} \big([p,q] T_1^p T_2^q \big)^{\zeta_{pq}} =$$

$$= \sum_{\{(\zeta_{pq})_{(p,q)\in U} \mid \sum_{(p,q)\in U_r^\circ} \zeta_{pq} = \gamma_r \ \forall r\in\mathbb{N}\}} \prod_{r\in\mathbb{N}} \Big(\Big(\prod_{(p,q)\in U_r^\circ} [p,q]^{\zeta_{pq}} \Big) [\zeta_{pq}]_{(p,q)\in U_r^\circ} \big(T_1^{(\sum_{(p,q)\in U_r^\circ} p\zeta_{pq})} T_2^{(\sum_{(p,q)\in U_r^\circ} q\zeta_{pq})} \big) \Big)$$

Der Koeffizient bei $T_1^i T_2^j$ ist genau Y. Damit ist $Y=[i,j]$ unabhängig von γ.

$$\Longrightarrow \quad x = [i,j] \sum_{\gamma \vdash i+j} m[1]^{<\gamma_1>} m[2]^{<\gamma_2>} \ldots$$

Ergebnis: $\sum_{i\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\alpha\vdash i} m[1]^{<\alpha_1>}m[2]^{<\alpha_2>}\ldots\Big)T^i \in \varepsilon(\hat{\Gamma}(\Gamma^+(M)))$.

b) $x,y\in M \Rightarrow x+y \longmapsto z := \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\gamma\vdash k}(x+y)[1]^{<\gamma_1>}(x+y)[2]^{<\gamma_2>}\ldots\Big)T^k =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\gamma\vdash k}\Big(\sum_{(p,q)\in U_1^o} x[p]y[q]\Big)^{<\gamma_1>}\Big(\sum_{(p,q)\in U_2^o} x[p]y[q]\Big)^{<\gamma_2>}\Big)T^k =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\gamma\vdash k}\Big(\sum_{(\gamma_{pq})_{(p,q)\in U}\,|\,\sum_{(p,q)\in U_1^o}\gamma_{pq}=\gamma_1\ \forall l\in\mathbb{N}}\ \prod_{(p,q)}(x[p]y[q])^{<\gamma_{pq}>}\Big)T^k =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{(\gamma_{pq})_{(p,q)\in U}\,|\,\sum_{p+q>0}(p+q)\gamma_{pq}=k}\ \prod_{(p,q)}(x[p]y[q])^{<\gamma_{pq}>}\Big)T^k .$

Andererseits:

$\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\alpha\vdash i} x[1]^{<\alpha_1>}x[2]^{<\alpha_2>}\ldots\Big)T^i\Big)\ \tau\ \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\beta\vdash j} y[1]^{<\beta_1>}y[2]^{<\beta_2>}\ldots\Big)T^j\Big) =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{i+j=k}\ \sum_{\substack{\alpha\vdash i\\ \beta\vdash j}}(x[1]^{<\alpha_1>}x[2]^{<\alpha_2>}\ldots)\tau(y[1]^{<\beta_1>}y[2]^{<\beta_2>}\ldots)\Big)T^k =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{i+j=k}\ \sum_{\substack{\alpha\vdash i\\ \beta\vdash j}}\ \sum_{(\gamma_{pq})_{p,q}\in\hat{M}((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)}\ \prod_{(p,q)\neq 0}(x[p]y[q])^{<\gamma_{pq}>}\Big)T^k =$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{(\gamma_{pq})_{(p,q)\in U}\,|\,(\sum_{r\in\mathbb{N}} r(\sum_{q\in\mathbb{N}_o}\gamma_{rq}))+(\sum_{s\in\mathbb{N}} s(\sum_{p\in\mathbb{N}_o}\gamma_{ps}))=k\}}\ \prod_{(p,q)\in U}(x[p]y[q])^{<\gamma_{pq}>}\Big)T^k = z .$

Die im Satz definierte Abbildung ist also "additiv".

c) $rm \longmapsto \sum_{i\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\alpha\vdash i}(rm)[1]^{<\alpha_1>}(rm)[2]^{<\alpha_2>}\ldots\Big)T^i =$

$= \sum_{i\in\mathbb{N}_o}\Big(\sum_{\alpha\vdash i} r^{(\sum_j j\alpha_j)}\, m[1]^{<\alpha_1>}m[2]^{<\alpha_2>}\ldots\Big)\ T^i =$

$= \sum_{i\in\mathbb{N}_o} r^i \Big(\sum_{\alpha\vdash i} m^{[1]^{<\alpha_1>}} m^{[2]^{<\alpha_2>}} \ldots \Big) T^i$. Mit b) folgt also die R-Linearität. ■

14.1.2.KOR.: Es existiert genau ein R-Algebra-Homomorphismus $\underline{\underline{\chi}}: \Gamma(M) \longrightarrow \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M))$ mit

$$m^{[i]} \longmapsto \sum_{\alpha\vdash i} m^{[1]^{<\alpha_1>}} m^{[2]^{<\alpha_2>}} \ldots \quad \forall i\in\mathbb{N}_o;\ \forall m\in M \ . \ \blacksquare$$

14.1.3.DEF.: χ bezeichne den R-Algebra-Hom. aus 14.1.2., und für $i\in\mathbb{N}_o$ sei χ_{i-1} der durch

$\underline{\underline{\chi_{i-1}}}: \Gamma(M) \xrightarrow{\chi} \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M)) \xrightarrow{\pi_i} \Gamma_i(\Gamma(M))$ gegebene R-Algebra-Homomorphismus.

14.1.4. a) $\forall i,j\in\mathbb{N}_o\ \forall m\in M$: $\chi_{i-1}(m^{[j]}) =$

$$= \pi_i \Big(\sum_{\alpha\vdash j} m^{[1]^{<\alpha_1>}} m^{[2]^{<\alpha_2>}} \ldots \Big) = \sum_{\alpha\vdash j} m^{[0]^{[i-|\alpha|]}} m^{[1]^{[\alpha_1]}} m^{[2]^{[\alpha_2]}} \ldots .$$

b) $\chi_{-1}(m^{[j]}) = \delta_{j0}\, m^{[0]^{[0]}}$

$\chi_{-1} = \varepsilon_{\Gamma(M)}: \Gamma(M) \longrightarrow R \cong \Gamma_0(\Gamma(M))$

c) $\chi_0(m^{[j]}) = m^{[j]^{<1>}}$

$\chi_0 = id_{\Gamma(M)}: \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M) \cong \Gamma_1(\Gamma(M))$

14.1.5.LEMMA: Das folgende Diagramm kommutiert in R-ALG:

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M) & \xrightarrow{\quad\chi\quad} & \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{i-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ T_i(\Gamma(M)) & \xrightarrow{\quad \iota_\Gamma \quad} & \Gamma_i(\Gamma(M)) \end{array}$$

BEW.: $\iota_\Gamma \Big(\sum_{\alpha\vdash j} m^{[0]^{[i-|\alpha|]}} m^{[1]^{[\alpha_1]}} m^{[2]^{[\alpha_2]}} \ldots \Big) =$

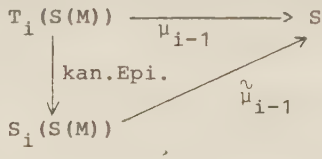
$$= \sum_{\alpha \vdash j} \sum_{\sigma \in K_i(i-|\alpha|,(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})} \overline{\sigma}(m^{[0]\otimes(i-|\alpha|)} \otimes m^{[1]\otimes\alpha_1} \otimes m^{[2]\otimes\alpha_2} \ldots)$$

$$\underset{5.2.16.}{=} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_i=j} m^{[\beta_1]} \otimes \ldots \otimes m^{[\beta_i]} \underset{(*)}{=} \Delta_{i-1}(m^{[j]}) \ .$$

(*) vgl. [Rob 63] V.2.; dort Δ_i statt Δ_{i-1} ! ■

14.1.6.BEM.: Ist $\mu = \mu_{S(M)} : S(M) \otimes S(M) \longrightarrow S(M)$ die Multiplikation auf $S(M)$, $\mu_{i-1} : T_i(S(M)) \longrightarrow S(M)$ durch Iteration aus μ entstanden und $\tilde{\mu}_{i-1}$ der eindeutig bestimmte R-Modul-Hom., so daß

(D_2)



kommutiert,

so sieht man, daß das Diagramm (D_1) in 14.1.5. im wesentlichen zu (D_2) "dual" ist.

Wie sieht $\tilde{\Delta}(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]})$ für $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$ aus ?

$$\tilde{\Delta}(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}) = \tau_{i\in I} \tilde{\Delta}(m_i^{[\alpha_i]}) = \tau_{i\in I} \Big(\sum_{\alpha(i)\vdash\alpha_i} \prod_{j\in\mathbb{N}} m_i^{[j]^{<\alpha(i)_j>}} \Big) =$$

$$= \sum_{(\alpha(i)\vdash\alpha_i)_i} \sum_{\{(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_o^I-0} \mid \sum_{\{p\mid p_i=q\}} \gamma_p = \alpha(i)_q \ \forall i\in I,\ q\in\mathbb{N}\}} \prod_p \Big(\prod_i m_i^{[p_i]} \Big)^{<\gamma_p>} .$$

14.1.7.DEF.: Für eine Indexmenge $I \neq \emptyset$ und $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}_o^{(I)}$ sei

$$\nabla(I,\alpha) := \{(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \gamma_p \in \mathbb{N}_o \ \forall p;\ \forall i\in I:\ \sum_{q\in\mathbb{N}} q \Big(\sum_{\{p\mid p_i=q\}} \gamma_p \Big) = \alpha_i \} =$$

$$= \{(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \forall i\in I:\ \sum_p p_i \gamma_p = \alpha_i \}.$$

14.1.8.BEM.: $(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha) \Longrightarrow \sum_p \gamma_p < \infty$, denn $\sum \alpha_i =$
$= \sum_i \sum_p p_i \gamma_p = \sum_p (\sum_i p_i)\gamma_p$ und $\sum_i p_i \in \mathbb{N}$, da $p \neq 0$.

Also ist $\sum_p \gamma_p \leq \sum_i \alpha_i$.

14.1.9. a) $\chi(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}) = \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \prod_p (\prod_i m_i^{[p_i]})^{<\gamma_p>}$

b) $\chi_{k-1}(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}) = \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} (\prod_p (\prod_i m_i^{[p_i]})^{[\gamma_p]}) 1_R^{[k-|\gamma|]}$

14.1.10. Das folgende Diagramm kommutiert für alle R-Modul-Hom. $f: M \longrightarrow N$ in R-ALG:

$$(D_3) \qquad \begin{array}{ccccc} \Gamma(M) & \xrightarrow{\chi} & \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M)) & \xrightarrow{\pi_i} & \Gamma_i(\Gamma(M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\Gamma}((\Gamma_i(f))_{i>0})} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_i(\Gamma(f))} \\ \Gamma(N) & \xrightarrow{\chi} & \hat{\Gamma}(\Gamma^+(N)) & \xrightarrow[i]{\pi_i} & \Gamma_i(\Gamma(N)) \end{array}$$

BEW.: Daß das linke Diagramm kommutiert rechnet man für $m^{[j]}$ leicht nach. Das rechte kommutiert nach 13.1.7.2). ■

Nach 14.1.10. sind also χ und χ_{i-1} natürliche Transformationen. Für Δ_{i-1} ist dies ebenfalls klar.

14.1.11.LEMMA: Das folgende Diagramm kommutiert in R-MOD:

$$(D_4) \qquad \begin{array}{ccccc} \Gamma(M) & \xrightarrow[\Delta_{\Gamma(M)}]{} & \Gamma(M)\otimes\Gamma(M) & \xrightarrow{\chi_{n-1}\otimes\chi_{n-1}} & \Gamma_n(\Gamma(M))\otimes\Gamma_n(\Gamma(M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)}} \\ \Gamma_n(\Gamma(M)) & & \xrightarrow{\Gamma_n(\Delta_{\Gamma(M)})} & & \Gamma_n(\Gamma(M)\otimes\Gamma(M)) \end{array}$$

BEW.: Für $\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$ gilt:

$$\mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)} \circ \chi_{n-1} \otimes \chi_{n-1} \Big(\sum_{(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}=\alpha_i)_i} \prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_{i1}]} \otimes \prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_{i2}]} \Big) =$$

$$= \sum_{(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}=\alpha_i)_i} \sum_{\substack{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,(\alpha_{i1})_i) \\ (\zeta_q)_q \in \nabla(I,(\alpha_{i2})_i)}} \mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)} \big((\prod_p (\prod_i m_i^{[p_i]})^{[\gamma_p]}) 1_R^{[n-|\gamma|]} \otimes$$

$$\otimes (\prod_q (\prod_i m_i^{[q_i]})^{[\zeta_q]}) 1_R^{[n-|\zeta|]} \big) =$$

$$= \sum_{(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}=\alpha_i)_i} \sum_{\substack{(\gamma_p)_p, (\zeta_q)_q \\ \gamma_0 := n-|\gamma| \\ \zeta_0 := n-|\zeta|}} \sum_{(\beta_{pq}) \in M((\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_o}(I); (\zeta_q)_{q\in\mathbb{N}_o}(I))} \prod_{p,q} (\prod_i m_i^{[p_i]} \otimes \prod_i m_i^{[q_i]})^{[\beta_{pq}]} =$$

$$= \sum_{\{(\beta_{pq})_{p,q\in\mathbb{N}_o}(I) \mid \sum_{p,q} (p_i+q_i)\beta_{pq} = \alpha_i \ \forall i\in I \ ; \ \sum_{p,q} \beta_{pq} = n\}} \prod_{p,q} (\prod_i m_i^{[p_i]} \otimes \prod_i m_i^{[q_i]})^{[\beta_{pq}]} .$$

$$\Gamma_n(\Delta_{\Gamma(M)}) \circ \chi_{n-1} \Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]} \Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,(\alpha_i))} \Delta_{\Gamma(M)}(1_R)^{[n-|\gamma|]} \prod_p \Delta_{\Gamma(M)} (\prod_i m_i^{[p_i]})^{[\gamma_p]} =$$

$$= \sum_{\substack{(\gamma_p)_p \\ \gamma_0 := n-|\gamma|}} \prod_p \Big(\sum_{(p_{i1}+p_{i2}=p_i)_i} \prod_i m_i^{[p_{i1}]} \otimes \prod_i m_i^{[p_{i2}]} \Big)^{[\gamma_p]} =$$

$$= \sum_{\substack{(\gamma_p)_p \\ \gamma_0 := n-|\gamma|}} \prod_p \sum_{\{(\gamma_{(p_{ij})})_{\sum_j p_{ij} = p_i \ \forall i \mid \sum_{(p_{ij})} \gamma_{(p_{ij})} = \gamma_p\}} \prod_{(p_{ij})} \Big(\prod_i m_i^{[p_{i1}]} \otimes \prod_i m_i^{[p_{i2}]} \Big)^{[\gamma_{(p_{ij})}]} =$$

$$= \sum_{(\gamma_{(p_{ij})})} \prod_{p\in\mathbb{N}_o(I)} \prod_{(p_{ij})} \Big(\prod_i m_i^{[p_{i1}]} \otimes \prod_i m_i^{[p_{i2}]} \Big)^{[\gamma_{(p_{ij})}]} =: Z.$$

Dabei läuft die Summe über die Menge

$$\{(\gamma_{(p_{ij})})_{j\in\underline{2}} \sum p_{ij}=p_i\ \forall i; p\in\mathbb{N}_o^{(I)} \mid \sum_p p_i \sum_{(p_{ij})} \gamma_{(p_{ij})}=\alpha_i\ \forall i;\ \sum_p \sum_{(p_{ij})} \gamma_{(p_{ij})}=n\}.$$

$$Z=\sum_{\{(\gamma_{pq})_{p,q}\in\mathbb{N}_o^{(I)} \mid \sum_{p,q}(p_i+q_i)\gamma_{pq}=\alpha_i\ \forall i\ ;\ \sum_{p,q}\gamma_{pq}=n\}} \prod_{p,q}\left(\prod_i m_i^{[p_i]} \otimes \prod_i m_i^{[q_i]}\right)^{[\gamma_{pq}]} . \quad \blacksquare$$

14.1.12.DEF.: $\underline{\Delta^+}:\Gamma(M)\longrightarrow\Gamma(\Gamma^+(M))$ sei der durch

$$\Delta^+ := (Sh^+)^{-1}\circ\chi \underset{13.1.9.b)}{=} \prod_i (\Gamma_i(\pi^+_{\Gamma(M)})\circ\chi)\Big|_{.,\Gamma(\Gamma^+(M))}$$ definierte R-Modul-Homomorphismus.

14.1.13. a) $\Delta^+\left(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}\right) = \sum_{(\gamma_p)_p\in\nabla(I,\alpha)} \prod_p \left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[\gamma_p]}$;

b) $\Delta^+(1_{\Gamma(M)}) = 1_{\Gamma(\Gamma^+(M))}$; c) $\Delta^+(\Gamma^+(M)) \subset \Gamma^+(\Gamma^+(M))$.

14.1.14.LEMMA: a) Δ^+ und damit χ sind aufspaltende Monomorphismen. Genauer gilt: $\Gamma(\pi_1)\circ\Delta^+ = id_{\Gamma(M)}$.

b) $\pi_1\circ\Delta^+\circ\iota^+: \Gamma^+(M)\longrightarrow\Gamma_1(\Gamma^+(M)) \cong \Gamma^+(M)$ ist gleich $id_{\Gamma^+(M)}$.

BEW.: a) $\Gamma(\pi_1)\left(\prod_p\left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[\gamma_p]}\right) = \prod_p \pi_1\left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[\gamma_p]} = 0$, falls $\sum_i p_i \neq 1$ ist für ein p mit $\gamma_p\neq 0$. Von Null verschiedene Werte werden also nur von solchen $(\gamma_p)_p$ geliefert, für die gilt: $((\sharp i\in I:\ p=(\delta_{ij})_j) \Longrightarrow \gamma_p=0\ )$ (*). Ist (*) erfüllt, so gilt: $\alpha_j=\sum_p p_j\gamma_p = \sum_{i\in I}\delta_{ij}\gamma_{(\delta_{il})_l} = \gamma_{(\delta_{jl})_l}$.

$$\Gamma(\pi_1)\left(\sum_{(\gamma_p)_p}\prod_p\left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[\gamma_p]}\right) = \prod_{i\in I}\pi_1\left(m_i^{[1]}\right)^{[\gamma_{(\delta_{il})_l}]} = \prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} .$$

b) $\pi_1 \circ \Delta^+ \left(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \right) = \pi_1 \left(\sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \prod_p \left(\prod_i m_i^{[p_i]} \right)^{[\gamma_p]} \right)$.

$\pi_1 \left(\prod_p \left(\prod_i m_i^{[p_i]} \right)^{[\gamma_p]} \right) \neq 0 \Longrightarrow \sum_p \gamma_p = 1 \Longrightarrow \exists_1\, p(\alpha)\colon \gamma_p = \delta_{p\,p(\alpha)}$

$\alpha_i = \sum_p p_i \gamma_p = \sum_p p_i \delta_{p\,p(\alpha)} = p(\alpha)_i$. $|\alpha| > 0 \Rightarrow (p(\alpha)_i)_i \neq 0 \Longrightarrow$

$\pi_1 \circ \Delta^+ \left(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \right) = \left(\prod_i m_i^{[\alpha_i]} \right)^{[1]}$. ■

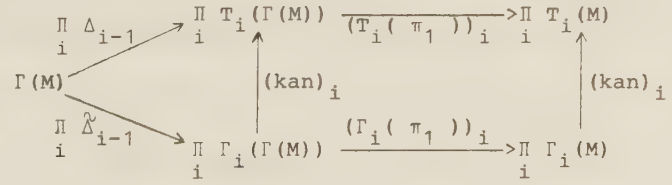
14.1.15.KOR.: $\mathrm{Im}\left(\prod_i (\Gamma_i(\pi_1) \circ \overset{\sim}{\Delta}_{i-1}) \right) \subset \Gamma(M)$ und

$$\prod_i \Gamma_i(\pi_1) \circ \overset{\sim}{\Delta}_{i-1} \Big|_{\ldots \Gamma(M)} = \mathrm{id}_{\Gamma(M)} .$$

BEW.: $\prod_i (\Gamma_i(\pi_1) \circ \overset{\sim}{\Delta}_{i-1}) = \prod_i (\Gamma_i(\pi_1) \circ \overset{\sim}{\Delta})$. Der Rest ist klar. ■

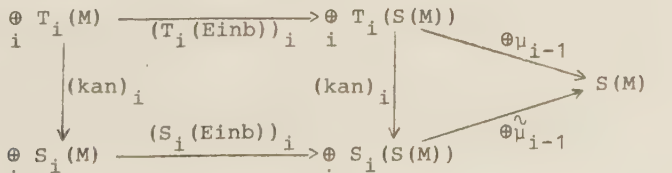
14.1.16.BEM.: Im folgenden kommutativen Diagramm

(D_5)



ist nach 14.1.15. die untere "Zeile" die Identität auf $\Gamma(M)$, während die obere "Zeile" bedeutet, daß man $\Gamma(M)$ ganz "in Elemente aus M zerlegen" kann. Diese Situation ist dual zu folgendem Diagramm:

(D_6)



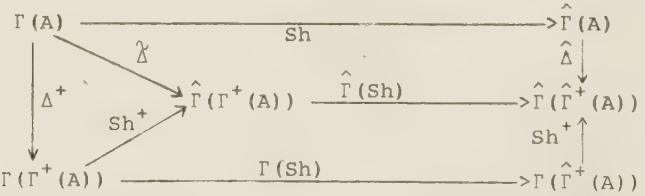
(vgl. auch Bem.14.1.6.). Die obere "Zeile" in (D_6) sagt aus, daß S(M) ganz "aus Elementen von M aufgebaut" werden kann, bzw. als Algebra von M erzeugt wird. Für die untere Zeile gilt: $\bigoplus_i \tilde{\mu}_{i-1} \circ (S_i(\text{Einb}))_i \Big|_{S(M),.} = id_{S(M)}$.

14.2. Von $\tilde{\Delta}$ abgeleitet, soll in diesem Abschnitt für eine R-Algebra A ein R-Algebra-Hom. $\hat{\Delta}: (\hat{\Gamma}(A), \tau) \longrightarrow (\hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A)), \tau)$ eingeführt und betrachtet werden ($\hat{\Gamma}^+(A) := \mathfrak{F}_1$, vgl. 9.1.13.). Genauso wie $\tilde{\Delta}$ die Cogebra-Struktur von $\Gamma(M)$ repräsentiert, beinhaltet $\hat{\Delta}$ eine Cogebra-Struktur für $\hat{\Gamma}(A)$, die $\hat{\Gamma}(A)$ sogar zur Bigebra macht.

14.2.1.DEF.: $\hat{\Delta}: \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A))$ sei der durch $\hat{\Delta} := \hat{\Gamma}(Sh) \circ \tilde{\Delta} \circ Sh^{-1}$ definierte R-Modul-Hom.. (Eigentlich $\hat{\Gamma}(Sh|)$.. mit $Sh| : \Gamma^+(A) \to \hat{\Gamma}^+(A)$)

Damit ergibt sich folgendes kommutative Diagramm:

(D_7)



Das linke Dreieck kommutiert nach 14.1.12., der untere rechte Teil nach 13.1.7..

$$\hat{\Delta}\Big(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}\Big) = \hat{\Gamma}(Sh) \circ \tilde{\Delta}\Big(\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}\Big) = \hat{\Gamma}(Sh)\Big(\sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \prod_p \Big(\prod_i a_i^{[p_i]}\Big)^{<\gamma_p>}\Big)$$

Also gilt für alle $\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>} \in \hat{\Gamma}(A)$:

14.2.2. $\hat{\Delta}(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}) = \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \prod_p (\prod_i a_i^{<p_i>})^{<\gamma_p>}$.

14.2.3. $\hat{\Gamma}(\pi_1)\circ\hat{\Delta} = id_{\hat{\Gamma}(A)}$.

BEW.: Entweder analog zu 14.1.4. oder durch Zurückführung darauf, wie folgt:

$\hat{\Gamma}(\pi_1)\circ\hat{\Delta} = Sh\circ\Gamma(\pi_1)\circ Sh^{-1}\circ\hat{\Gamma}(Sh|)\circ\hat{\chi}\circ Sh^{-1} =$

$= Sh\circ\Gamma(\pi_1)\circ Sh^{-1}\circ\hat{\Gamma}(Sh|)\circ Sh^{+}\circ\Delta^{+}\circ Sh^{-1} = Sh\circ\Gamma(\pi_1)\circ\Gamma(Sh)\circ\Delta^{+}\circ Sh^{-1} =$

$= Sh\circ\Gamma(\pi_1\circ Sh|)\circ\Delta^{+}\circ Sh^{-1} = Sh\circ\Gamma(\pi_1)\circ\Delta^{+}\circ Sh^{-1} = Sh\circ Sh^{-1} = id$. ■

14.2.4.DEF.: $\forall i\in\mathbb{N}_0$: $\underline{\underline{\hat{\Delta}_{i-1}}} := \pi_i\circ\hat{\Delta}:\hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \Gamma_i(\hat{\Gamma}(A))$

Nach 13.1.7.2) gilt: $\pi_i\circ\hat{\Gamma}(Sh|)\circ\hat{\chi} = \Gamma_i(Sh)\circ\pi_i\circ\hat{\chi} = \Gamma_i(Sh)\circ\chi_{i-1}$.

14.2.5. a) $\hat{\Delta}_{k-1} = \Gamma_i(Sh)\circ\chi_{k-1}\circ Sh^{-1}$

b) $\hat{\Delta}_{k-1}(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}) = \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} (\prod_p (\prod_i a_i^{<p_i>})^{[\gamma_p]})^{1^{[k-|\gamma|]}_{\hat{\Gamma}(A)}}$.

14.2.6.DEF.: Für $i\in\mathbb{N}_0$ sei der R-Modul-Homomorphismus

$\hat{\Gamma}(A) \xrightarrow{\hat{\chi}} \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^{+}(A)) \hookrightarrow \prod_i \Gamma_i(\hat{\Gamma}(A)) \xrightarrow[(kan)]{} \prod_i T_i(\hat{\Gamma}(A)) \xrightarrow{\pi_i} T_i(\hat{\Gamma}(A))$

wieder mit $\underline{\underline{\Delta_{i-1}}}$ bezeichnet. (Da ② im folgenden Diagramm kommutiert, ist dies vertretbar.)

In diesem Diagramm (D_8) gelten folgende Punkte:

③ kommutiert nach Def. von Δ_{i-1} (14.2.6.)

① kommutiert nach 14.1.5.

④ kommutiert nach Def. 14.2.1.

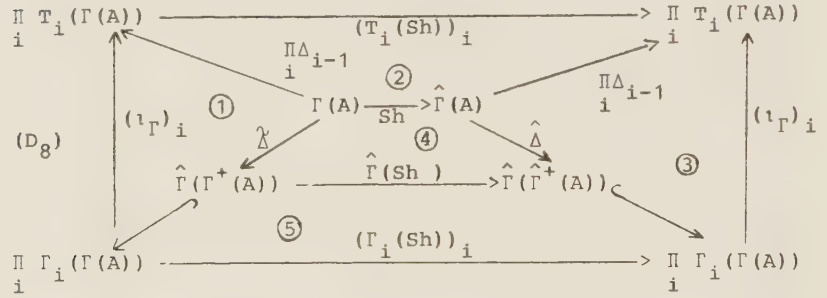
⑤ kommutiert nach 13.1.7.2).

(*) Das äußere Rechteck kommutiert, da ι_Γ nat. Transf. ist (6.1.2.c)).

$$T_i(Sh)\circ\Delta_{i-1} \underset{①}{=} T_i(Sh)\circ\iota_\Gamma\circ\overset{\curlyvee}{\Delta}_{i-1} \underset{(*)}{=} \iota_\Gamma\circ\Gamma_i(Sh)\circ\overset{\curlyvee}{\Delta}_{i-1} \underset{④⑤}{=}$$

$$= \iota_\Gamma\circ\hat{\Delta}_{i-1}\circ Sh \underset{③}{=} \Delta_{i-1} .$$

② kommutiert damit auch.



14.2.7.SATZ: $\hat{\Delta}:(\hat{\Gamma}(A),\tau) \longrightarrow (\hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A)),\tau)$ ist ein R-Algebra-Homomorphismus.

BEW.: a) $\hat{\Delta}(\prod_{i\in I} a_i^{<0>}) \underset{14.2.2.}{=} \prod_p (\prod_i a_i^{<p_i>})^{<0>} = 1_{\hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A))}$

b) $\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}, \prod_{j\in J} b_j^{<\beta_j>} \in \hat{\Gamma}(A)$ (o.E. $\sum_{i\in I}\alpha_i \neq 0 \neq \sum_{j\in J}\beta_j$) .

$$\hat{\Delta}(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>} \tau \prod_{j\in J} b_j^{<\beta_j>}) =$$

$$= \sum_{(\zeta_{ij})_{(i,j)}\in\hat{M}((\alpha_i)_{i\in I};(\beta_j)_{j\in J})} \hat{\Delta}(\prod_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j^{<\zeta_{ij}>} \prod_{i\in I} a_i^{<\zeta_{i0}>} \prod_{j\in J} b_j^{<\zeta_{0j}>})$$

$$\underset{a_0:=1_A,\ b_0:=1_A}{=} \sum_{(\zeta_{ij})_{(i,j)}} \sum_{(\gamma_p)_p\in\nabla(I_o\times J_o-0,\zeta)} \prod_p (\prod_{(i,j)} a_i b_j^{<p(i,j)>})^{<\gamma_p>} =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_o^{(I_o\times J_o)}} \,|\, \sum_{i\in I_o}\sum_p p_{(i,j)}\gamma_p=\beta_j \ \forall j\in J;\ \sum_{j\in J_o}\sum_p p_{(i,j)}\gamma_p=\alpha_i \ \forall i\in I\}} \prod_p \Big(\prod_{(i,j)} a_i b_j^{<p_{(i,j)}>} \Big)^{<\gamma_p>} =$$

$$\hat{\Delta}\Big(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>} \Big) \tau \hat{\Delta}\Big(\prod_{j\in J} b_j^{<\beta_j>} \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{(\eta_p)_p\in\nabla(I,\alpha)\\(\nu_q)_q\in\nabla(J,\beta)}} \prod_p \Big(\prod_i a_i^{<p_i>}\Big)^{<\eta_p>} \tau \prod_q \Big(\prod_j b_j^{<q_j>}\Big)^{<\nu_q>} =$$

$$= \sum_{(\eta_p)_p,(\nu_q)_q} \sum_{(\zeta_{pq})_{pq}\in\hat{M}((\eta_p)_p;(\nu_q)_q)} \prod_{(p,q)\neq 0} \Big(\prod_i a_i^{<p_i>} \tau \prod_j b_j^{<q_j>}\Big)^{<\zeta_{pq}>} =$$

$$= \sum_{(\eta_p)_p,(\nu_q)_q} \sum_{(\zeta_{pq})_{pq}} \prod_{(p,q)\neq 0} \Big(\sum_{(\xi_{ij})_{ij}\in\hat{M}((p_i)_{i\in I};(q_j)_{j\in J})} \prod_{(i,j)\neq 0} a_i b_j^{<\xi_{ij}>} \Big)^{<\zeta_{pq}>} =$$

$$= \sum_{(\eta_p)_p,(\nu_q)_q} \sum_{(\zeta_{pq})_{pq}} \sum_{\{(\zeta_{pq}^{\xi})_{\xi\in\hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \,|\, \sum_\xi \zeta_{pq}^{\xi}=\zeta_{pq}\}_{(p,q)\neq 0}} \prod_{(p,q)\neq 0} \Big(\prod_\xi \Big(\prod_{(i,j)\neq 0} a_i b_j^{<\xi_{ij}>} \Big)^{<\zeta_{pq}^{\xi}>} =$$

$$= \sum_{(\zeta_{pq}^{\xi})} \prod_{(p,q)\neq 0} \prod_\xi \Big(\prod_{(i,j)\neq 0} a_i b_j^{<\xi_{ij}>} \Big)^{<\zeta_{pq}^{\xi}>} =: Y.$$

Dabei läuft die Summe über alle $(\zeta_{pq}^{\xi})_{(p,q)\neq 0;\,\xi\in\hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)}$ die den folgenden Bedingungen genügen:

1) $\sum_{q\in\mathbb{N}_o^{(J)}} q_j \Big(\sum_{p\in\mathbb{N}_o^{(I)}} \sum_{\xi\in\hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \zeta_{pq}^{\xi} = \beta_j \quad \forall j\in J$,

2) $\sum_{p\in\mathbb{N}_o^{(I)}} p_i \Big(\sum_{q\in\mathbb{N}_o^{(J)}} \sum_{\xi\in\hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \zeta_{pq}^{\xi} = \alpha_i \quad \forall i\in I$.

Kennzeichnet man die Abhängigkeit bei ξ von p und q durch Ersetzen von ξ durch ξ^{pq} , so kann man die Bedingungen 1)

und 2) umschreiben zu

$$1') \quad \sum_{(p,q)\neq 0} \sum_{\xi^{pq}\in \hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \sum_i \xi_{ij}^{pq}\, \zeta_{pq}^{(\xi^{pq})} = \beta_j \quad \forall j\in J ,$$

$$2') \quad \sum_{(p,q)\neq 0} \sum_{\xi^{pq}\in \hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \sum_j \xi_{ij}^{pq}\, \zeta_{pq}^{(\xi^{pq})} = \alpha_i \quad \forall i\in I .$$

$$Y = \sum_{(\zeta_\xi)_\xi} \prod_{\xi\in \dot{\bigcup}_{(p,q)\neq 0} \hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \Big(\prod_{(i,j)\neq 0} a_i b_j^{<\xi_{ij}>} \Big)^{<\zeta_\xi>} .$$

Dabei läuft die Summe über alle $(\zeta_\xi)_{\xi\in \dot{\bigcup}_{(p,q)\neq 0} \hat{M}((p_i)_i;(q_j))}$ mit den Eigenschaften:

$$1'') \quad \sum_{i\in I_o} \sum_{\xi\in \dot{\bigcup}_{(p,q)\neq 0} \hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \xi_{ij}\, \zeta_\xi = \beta_j \quad \forall j\in J ,$$

$$2'') \quad \sum_{j\in J_o} \sum_{\xi\in \dot{\bigcup}_{(p,q)\neq 0} \hat{M}((p_i)_i;(q_j)_j)} \xi_{ij}\, \zeta_\xi = \alpha_i \quad \forall i\in I .$$

$$\dot{\bigcup}_{(p,q)\neq 0} \hat{M}((p_i);(q_j)_j) =$$

$$= \{ (\xi_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \mid (\exists i\in I: \sum_{j\in J_o} \xi_{ij}>0) \vee (\exists j\in J: \sum_{i\in I_o} \xi_{ij}>0) \} =$$

$$= \{ (\xi_{ij})_{(i,j)\in I_o\times J_o-0} \mid \exists (i,j)\in I_o\times J_o-0 : \xi_{ij}\neq 0 \} = \mathbb{N}_o^{(I_o\times J_o-0)}-0$$

Der Rest ist klar. ■

14.2.8.KOR.: Für alle $i\in\mathbb{N}_o$ ist $\hat{\Delta}_{i-1}: (\hat{\Gamma}(A),\tau) \longrightarrow (\Gamma_i(\hat{\Gamma}(A)),\tau)$ ein R-Algebra-Hom..

BEW.: Klar nach Definition von $\hat{\Delta}_{i-1}$, da π_i R-Algebra-Hom.. ■

14.2.9.KOR.: Für alle $i\in\mathbb{N}_o$ ist $\Delta_{i-1}: (\hat{\Gamma}(A),\tau) \longrightarrow (T_i(\hat{\Gamma}(A)),\tau)$ ein R-Algebra-Hom..

BEW.: Klar nach Def. von Δ_{i-1} . ■

14.2.10.KOR.: Mit $\underline{\varepsilon_{\hat{\Gamma}(A)}} := \pi_0$ und $\underline{\Delta_{\hat{\Gamma}(A)}} := \Delta_1 : \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A) \otimes \hat{\Gamma}(A)$ wird $(\hat{\Gamma}(A), \mu_{\hat{\Gamma}(A)}, \eta_{\hat{\Gamma}(A)}, \Delta_{\hat{\Gamma}(A)}, \varepsilon_{\hat{\Gamma}(A)})$ zur cokommutativen R-Bigebra.

BEW.: $\Delta_{\hat{\Gamma}(A)}$ und $\varepsilon_{\hat{\Gamma}(A)}$ sind R-Algebra-Hom.. Coassoziativität und Cokommutativität folgen mit (D_8) ② aus den entsprechenden Eigenschaften von $\Delta_{\Gamma(A)}$ und $\varepsilon_{\Gamma(A)}$.
$\varepsilon_{\Gamma(A)} = \varepsilon_{\hat{\Gamma}(A)} \circ Sh$ liefert für $\varepsilon_{\hat{\Gamma}(A)}$ die Eigenschaften der Coeins aus denen von $\varepsilon_{\Gamma(A)}$. ■

14.2.11.BEM.: Ebenfalls mit (D_8) ② sieht man, daß die $\Delta_{i-1} : \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow T_i(\hat{\Gamma}(A))$ in üblicher Weise aus $\Delta_{\hat{\Gamma}(A)}$ iteriert werden können.

14.2.12. Für $\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>} \in \hat{\Gamma}(A)$ ist $\Delta_{\hat{\Gamma}(A)}(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}) =$

$Sh \underline{\otimes} Sh \circ \Delta_{\Gamma(A)} \circ Sh^{-1}(\prod_{i\in I} a_i^{<\alpha_i>}) = Sh \underline{\otimes} Sh \circ \Delta_{\Gamma(A)}(\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]})$ 1.3.11. =

$$= \sum_{j+k=|\alpha|} \sum_{(\gamma_{pq}) \in M((\alpha_i)_{i\in I}; (j,k))} \prod_{i\in I} a_i^{<\gamma_{i1}>} \otimes \prod_{i\in I} a_i^{<\gamma_{i2}>} .$$

Aus (D_8) ④ und ⑤ ergibt sich speziell die Kommutativität von (D_9). Die Kommutativität von (D_{10}) erhält man durch Zurückführung auf (D_9) unter Verwendung der Definitionen von $\hat{\Delta}_{i-1}$ und $\hat{\Gamma}(f)$, oder vgl. 15.1.4..

(D_9)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(A) & \xrightarrow{\quad Sh \quad} & \hat{\Gamma}(A) \\ {\scriptstyle \Delta_{i-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\Delta}_{i-1}} \\ \Gamma_i(\Gamma(A)) & \xrightarrow{\Gamma_i(Sh)} & \Gamma_i(\hat{\Gamma}(A)) \end{array}$$

(D_{10})

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(\Gamma(A)) & \xrightarrow{\hat{\Gamma}(Sh)} & \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}(A)) \\ {\scriptstyle \hat{\Delta}_{k-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\Delta}_{k-1}} \\ \Gamma_k(\hat{\Gamma}(\Gamma(A))) & \xrightarrow{\Gamma_k(\hat{\Gamma}(Sh))} & \Gamma_k(\hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}(A))) \end{array}$$

Ist nun A^+ Algebra ohne 1 und $A:=A^+\hat{\oplus}R$, so folgt für $\hat{\Delta}:\hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A))$ aus 14.2.2. und 14.2.5.b) sofort:

14.2.13. a) $\hat{\Delta}(\hat{\Gamma}(A^+)) \subset \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A^+))$

b) $\forall\, k\in\mathbb{N}_0$: $\hat{\Delta}_{k-1}(\hat{\Gamma}(A^+)) \subset \Gamma_k(\hat{\Gamma}(A^+))$.

Bezeichnet man die Einschränkung $\hat{\Delta}_{k-1}\big|_{\hat{\Gamma}(A^+),\Gamma_k(\hat{\Gamma}(A^+))}$ wieder mit $\hat{\Delta}_{k-1}$, so kommutiert:

(D_{11})

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Gamma}(A^+) & \xrightarrow{\hat{\Delta}_{k-1}} & \Gamma_k(\hat{\Gamma}(A^+)) & \xrightarrow{\iota_\Gamma} & T_k(\hat{\Gamma}(A^+)) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{Einb.}} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_k(\text{Einb.})} & & \downarrow{\scriptstyle T_k(\text{Einb})} \\ \hat{\Gamma}(A) & \xrightarrow{\hat{\Delta}_{k-1}} & \Gamma_k(\hat{\Gamma}(A)) & \xrightarrow{\iota_\Gamma} & T_k(\hat{\Gamma}(A)) \end{array}$$

14.2.14.KOR.: Mit $\underline{\underline{\varepsilon_{\hat{\Gamma}(A^+)}}}:=\pi_0$ und

$\underline{\underline{\Delta_{\hat{\Gamma}(A^+)}}}:=\Delta_1:=\iota_\Gamma\circ\hat{\Delta}_1:\hat{\Gamma}(A^+)\longrightarrow \hat{\Gamma}(A^+)\otimes\hat{\Gamma}(A^+)$ wird

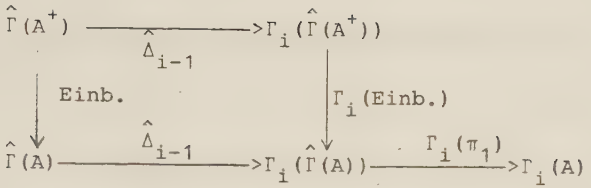
$(\hat{\Gamma}(A^+), \mu_{\hat{\Gamma}(A^+)}, \eta_{\hat{\Gamma}(A^+)}, \Delta_{\hat{\Gamma}(A^+)}, \varepsilon_{\hat{\Gamma}(A^+)})$ zur cokommutativen R-Bigebra.

BEW.: Folgt leicht mit den Definitionen und (D_{11}). ■

14.2.15.BEM.: Die $\underline{\underline{\Delta_{i-1}}}:=\iota_\Gamma\,\hat{\Delta}_{i-1}:\hat{\Gamma}(A^+)\longrightarrow T_k(\hat{\Gamma}(A^+))$ können natürlich wieder aus $\Delta_{\hat{\Gamma}(A^+)}$ iteriert werden.

Betrachte noch einmal (D_{11}); aus

(D_{12})



ergibt sich : $\prod_i \Gamma_i(\pi_1 \circ \text{Einb.}) \circ \hat{\Delta}_{i-1} = \prod_i (\Gamma_i(\pi_1) \circ \hat{\Delta}_{i-1}) \circ \text{Einb.}$.

Wegen $id^{\wedge}_{\hat{\Gamma}(A)} = \hat{\Gamma}(\pi_1) \circ \hat{\Delta} = \prod_i \Gamma_i(\pi_1) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(A)}$ folgt daraus

14.2.16. $\prod_i \Gamma_i(\pi_1 \circ \text{Einb.}) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(A^+)} = id^{\wedge}_{\hat{\Gamma}(A^+)}$.

KAPITEL 15 : Die Erweiterung von $\psi: \Gamma^+(M) \longrightarrow \mathbf{N}$ zu $\overline{\psi}: \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(N)$, Anwendung auf die Komposition von Polynomgesetzen und Übertragung auf Algebra-Homomorphismen $\psi: \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow B$.

Ist K ein Körper, sind V,W endlich-dimensionale Vektorräume und ist $\psi: \Gamma^+(V) \longrightarrow W$ ein Vektorraum-Hom., dann existiert genau ein $\overline{\psi}: \Gamma(V) \longrightarrow \Gamma(W)$, das ψ "fortsetzt". ([Swe 69] 12.2.5.) Hat man den R-Algebra-Hom. χ und damit Δ^+ zur Verfügung, so läßt sich dieser Satz für beliebige Grundringe R und bel. R-Moduln beweisen. Um jedoch hier Eindeutigkeit für $\overline{\psi}$ zu erzwingen, muß der Begriff des "Cogebra-Hom." modifiziert werden. Auch der Begriff "cokommutativ" wird im Hinblick auf die Besonderheiten der Cogebra $\Gamma(M)$ verschärft.
Es zeigt sich, daß man mit der Fortsetzung von ψ die Komposition von Formen (vgl. [Schm 71] 3.3) und von allgemei-

nen Polynomgesetzen gleich miterledigt hat.

15.1.

15.1.1.DEF.: Eine cokommutative Cogebra $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ heißt "stark cokommutativ": $\Longleftrightarrow$ $\forall i\in\mathbb{N}$: $\Delta_i:C\longrightarrow T_{i+1}(C)$ faktorisiert über $\Gamma_{i+1}(C)$.

Mit $\underline{\underline{\chi_{-1}}}:=\varepsilon_C:C\longrightarrow R\cong\Gamma_0(C)$ und $\underline{\underline{\chi_0}}:=id_C:C\longrightarrow C\cong\Gamma_1(C)$ hat man also ein Tupel $(\chi_{i-1})_{i\in\mathbb{N}_o}$ von R-Modulhomomorphismen $\underline{\underline{\chi_{i-1}}}:C\longrightarrow\Gamma_i(C)$.

Ein R-Modul-Hom. $f:C\longrightarrow D$ zwischen zwei stark cokommutativen Cogebren C,D heißt "stark cokommutativer R-Cogebra-Hom." : $\Longleftrightarrow$ $\forall i\in\mathbb{N}_o$: Das folgende Diagramm kommutiert:

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad f \quad} & C \\ {\scriptstyle\chi_{i-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\chi_{i-1}} \\ \Gamma_i(C) & \xrightarrow{\Gamma_i(f)} & \Gamma_i(C) \end{array}$$

Nach Definition von χ_1 ist f dann auch R-Cogebra-Hom. im üblichen Sinn.

15.1.2.BEM.: Ist etwa R ein Körper, so ist die Kategorie der stark cokommutativen Cogebren über R mit der Kategorie der cokommutativen R-Cogebren identisch. In diesem Fall ist nämlich der kan Hom. $\iota_\Gamma:\Gamma(M)\longrightarrow T(M)$ injektiv (vgl.6.1., auch wegen weiterer Fälle.).

Aus Kap. 14 übernimmt man sofort folgende Ergebnisse:

15.1.3. a) $\Gamma(M)$ ist stark cokommut. Cogebra $(\forall M\in R\text{-MOD})$(14.1.14)

b) $\hat{\Gamma}(A)$ ist stark cokommut. Cogebra $(\forall A\in R\text{-ALG})$ (14.1.16(D_5))

c) $\hat{\Gamma}(A^+)$ ist stark cokommut. Cogebra ($\forall A^+$ R-Algebra ohne 1 (Def. der Δ_{i-1}, 14.2.15)).

d) $\forall f:M\longrightarrow N$ R-Modul-Hom. ist $\Gamma(f):\Gamma(M)\longrightarrow\Gamma(N)$ stark cokommutativer Cogebra-Hom. (14.1.10.)

e) $Sh:\Gamma(A)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A)$ (A R-Alg.) ist stark cokommut. Cogebra-Hom. (14.2.(D_9)). Daraus folgert man leicht, daß auch $Sh^+:\Gamma(A^+)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A^+)$ stark cokommut. Cogebra-Hom. ist.

f) $\hat{\Gamma}(Sh):\hat{\Gamma}(\Gamma(A))\longrightarrow\hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}(A))$ ist stark cokommut. Cogebra-Hom. (14.2(D_{10})) (vgl.15.1.4.)

g) $\hat{\Gamma}(A^+)\longrightarrow\hat{\Gamma}(A^+\oplus R)$ ist stark cokommut. Cogebra-Hom. (14.2.(D_{11}))

15.1.4. Sind A,B R-Algebren,und ist $f:A\longrightarrow B$ R-Modul-Hom. mit $f(1_A)=1_B$, so ist $\hat{\Gamma}(f):\hat{\Gamma}(A)\longrightarrow\hat{\Gamma}(B)$ stark cokommutativer Cogebra-Hom..

BEW.: $\hat{\Delta}_{k-1}\circ\hat{\Gamma}(f) = \Gamma_k(Sh)\circ\gamma_{k-1}\circ Sh^{-1}\circ Sh\circ\Gamma(f)\circ Sh^{-1} =$

$=\Gamma_k(Sh)\circ\gamma_{k-1}\circ\Gamma(f)\circ Sh^{-1} \overset{(\bar{d})}{=} \Gamma_k(Sh)\circ\Gamma_k(\Gamma(f))\circ\gamma_{k-1}\circ Sh^{-1} =$

$=\Gamma_k(Sh\circ\Gamma(f)\circ Sh^{-1})\circ\Gamma_k(Sh)\circ\gamma_{k-1}\circ Sh^{-1} = \Gamma_k(\hat{\Gamma}(f))\circ\hat{\Delta}_{k-1}$. ■

15.1.5. Sind A^+ und B^+ R-Algebren ohne Eins, und ist $f:A^+\longrightarrow B^+$ ein R-Modul-Hom., so ist $\hat{\Gamma}(f):\hat{\Gamma}(A^+)\longrightarrow\hat{\Gamma}(B^+)$ ebenfalls stark cokommutativer Cogebra-Hom., wie man durch Zurückführung auf 15.1.4. beweist.

15.1.6.LEMMA: $\Delta^+:\Gamma(M)\longrightarrow\Gamma(\Gamma^+(M))$ ist stark cokommut. Cogebra.Hom.

BEW.: Für $x:=\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}\in\Gamma(M)$ gilt: $\gamma_{k-1}\circ\Delta^+(x) =$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \chi_{k-1}\left(\prod_p \left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[\gamma_p]}\right) =$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p} \sum_{(\zeta_q)_q \in \nabla(\mathbb{N}_o^{(I)}-0,\gamma)} (1_{\Gamma(\Gamma^+(M))})^{[k-|\zeta|]} \prod_q \left(\prod_p \left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[q_p]}\right)^{[\zeta_q]}$$

$$\Gamma_k(\Delta^+) \circ \chi_{k-1}(x) =$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \left(\prod_p \Delta^+\left(\prod_i m_i^{[p_i]}\right)^{[\gamma_p]}\right) \Delta^+(1_{\Gamma(M)})^{[k-|\gamma|]} =$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p} \left(\prod_p \left(\sum_{(\zeta_q)_q \in \nabla(I,p)} \prod_q \left(\prod_i m_i^{[q_i]}\right)^{[\zeta_q]}\right)^{[\gamma_p]}\right) (1_{\Gamma(\Gamma^+(M))})^{[k-|\gamma|]} =$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p} \sum_{\{(\gamma_{p\zeta})_{\zeta \in \nabla(I,p);\, p \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \sum_{\zeta \in \nabla(I,p)} \gamma_{p\zeta} = \gamma_p \ \forall p\}} (1_{\Gamma(\Gamma^+(M))})^{[k-|\gamma|]} \prod_p \left(\prod_{\zeta \in \nabla(I,p)} \prod_q \left(\prod_i m_i^{[q_i]}\right)^{[\zeta_q]}\right)^{[\gamma_{p\zeta}]}$$

$$= \sum_{\{(\gamma_{p\zeta})_{\zeta \in \nabla(I,p);\, p \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \sum_p p_i \left(\sum_{\zeta \in \nabla(I,p)} \gamma_{p\zeta}\right) = \alpha_i \ \forall i \in I\}} (1_{\Gamma(\Gamma^+(M))})^{[k-\sum_{p,\zeta} \gamma_{p\zeta}]} \prod_p \left(\prod_{\zeta \in \nabla(I,p)} \prod_q \left(\prod_i m_i^{[q_i]}\right)^{[\zeta_q]}\right)^{[\gamma_{p\zeta}]} =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_\zeta)_{\zeta \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \nabla(I,p)} \mid \sum_{\zeta \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \nabla(I,p)} \left(\sum_q q_i \zeta_q\right) \gamma_\zeta = \alpha_i \ \forall i \in I\}} (1_{\Gamma(\Gamma^+(M))})^{[k-|\gamma|]} \prod_{\zeta \in \bigcup \nabla(I,p)} \prod_q \left(\prod_i m_i^{[q_i]}\right)^{[\zeta_q]}.$$

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \nabla(I,p) = \bigcup_p \{(\zeta_q)_{q \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \sum_q q_i \zeta_q = p_i \ \forall i \in I\} =$$

$$= \{(\zeta_q)_{q \in \mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \exists i \in I: \sum_q q_i \zeta_q \neq 0\} =$$

$= \{(\zeta_q)_{q\in\mathbb{N}_o^{(I)}-0} \mid \exists q\in\mathbb{N}_o^{(I)}-0\colon \zeta_q\neq 0\} = \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N}_o^{(I)}-0)-0}$.

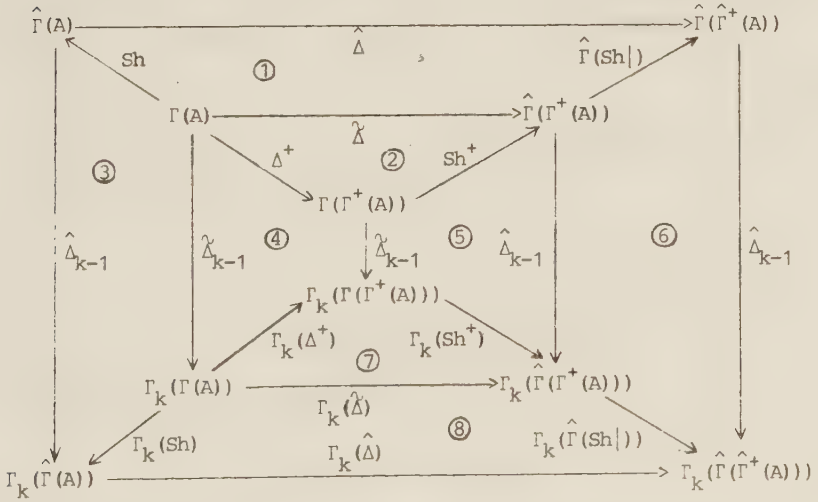
Der Rest ist klar. ■

15.1.7.KOR.: Δ^+ und $\hat{\Delta}$ sind Cogebra-Homomorphismen.

BEW.: Die Behauptung ist klar für Δ^+. $\hat{\Delta}=Sh^+\circ\Delta^+$ ist Cogebra-Hom. als Komposition von Cogebra-Hom..

15.1.8.KOR.: $\hat{\Delta}:\hat{\Gamma}(A)\longrightarrow\hat{\Gamma}(\hat{\Gamma}^+(A))$ ist stark cokommutativer Cogebra-Homomorphismus. (A R-Alg.)

BEW.: Betrachte das folgende Diagramm (D_2):



① kommutiert nach 14.2.1., womit auch ⑧ kommutiert.

② kommutiert nach 14.1.12., womit auch ⑦ kommutiert.

③ kommutiert nach 14.2.(D_9). ⑤ kommutiert nach 15.1.3.e)

④ kommutiert nach 15.1.6. . ⑥ kommutiert nach 15.1.5. ■

15.1.9.SATZ: Zu jedem R-Modul-Hom. $\psi:\Gamma^+(M) \longrightarrow N$ existiert genau ein stark cokommutativer R-Cogebra-Hom. $\overline{\psi}:\Gamma(M)\longrightarrow\Gamma(N)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

(D_3)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^+(M) & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma(M) & \xrightarrow[\quad\overline{\psi}\quad]{} & \Gamma(N) \end{array}$$

(π^+ (kan.Proj.), π_1)

(Vgl. [Swe 69]Th.12.2.5.)

BEW.: 1) Eindeutigkeit: $\overline{\psi} = id_{\Gamma(N)}\circ\overline{\psi} \underset{14.1.15.}{=} \prod_i \Gamma_i(\pi_1)\circ\chi_{i-1}\circ\overline{\psi}$

$\overset{\overline{\psi}\text{ stark cokomm.}}{=} \prod_i \Gamma_i(\pi_1)\circ\Gamma_i(\overline{\psi})\circ\chi_{i-1} \underset{(D_3)}{=} \prod_i \Gamma_i(\psi\circ\pi^+)\circ\chi_{i-1} =$

$= (\Gamma_i(\psi))_i\circ(\Gamma_i(\pi^+))_i\circ\chi \underset{14.1.12+13.1.9.b)}{=} \Gamma(\psi)\circ\Delta^+ .$

2) Existenz: $\overline{\overline{\psi}}:=\Gamma(\psi)\circ\Delta^+$

a) Kommutativität von (D_3): $\pi_1\circ\overline{\psi} = \pi_1\circ\Gamma(\psi)\circ\Delta^+ = \psi\circ\pi_1\circ\Delta^+ =$

$\overset{14.1.12\overline{+}13.1.9.b)}{=} \psi\circ\pi_1\circ(\Gamma_i(\pi^+))_i\circ\chi = \psi\circ\Gamma_1(\pi^+)\circ\pi_1\circ\chi =$

$= \psi\circ\Gamma_1(\pi^+)\circ\chi_0 = \psi\circ\pi^+ .$

b) $\overline{\psi}$ ist stark cokommutativer Cogebra-Hom.:

$\Gamma_k(\overline{\psi})\circ\chi_{k-1} = \Gamma_k(\Gamma(\psi))\circ\Gamma_k(\Delta^+)\circ\chi_{k-1} \underset{15.1.6.}{=} \Gamma_k(\Gamma(\psi))\circ\chi_{k-1}\circ\Delta^+$

$\overset{}{=} \chi_{k-1}\circ\Gamma(\psi)\circ\Delta^+ = \chi_{k-1}\circ\overline{\psi}$ $\overset{15.1.3.d)}{}$ ∎

Beispiel: $\psi=id_{\Gamma^+(M)} \Rightarrow \overline{\psi}=\Delta^+ .$

15.1.10. $\overline{\psi}(1_{\Gamma(M)}) = 1_{\Gamma(N)}$ und damit $\overline{\psi}(\Gamma_0(M))\subset\Gamma_0(N)$, denn $\Gamma(\psi)\circ\Delta^+(1_{\Gamma(M)}) = \Gamma(\psi)(1_{\Gamma(\Gamma^+(M))}) = 1_{\Gamma(N)}$.

15.1.11.BEM.: Die in 15.1.9. beschriebene Eigenschaft von $\Gamma(M)$ ist "ein Stück" Dualisierung der universellen Eigenschaft von $S(M)$ (vgl. [Bou 74] III§6 Prop.2).

15.1.12.BEM.: Ist $\hat{\psi}: M \longrightarrow N$ R-Modul-Hom. und $\psi: \Gamma^+(M) \xrightarrow{\pi_1} \Gamma_1(M) \cong M \xrightarrow{\hat{\psi}} N$, dann ist $\overline{\psi} = \Gamma(\hat{\psi})$.

BEW.: $\overline{\psi} = \Gamma(\psi) \circ \Delta^+ = \Gamma(\hat{\psi}) \circ \Gamma(\pi_1) \circ \Delta^+ \underset{14.1.14.a)}{=} \Gamma(\hat{\psi})$. ■

15.1.13.SATZ: a) Die durch 15.1.9. gegebene Abbildung von $\mathrm{Hom}(\Gamma^+(M), N)$ in $\mathrm{Hom}(\Gamma(M), \Gamma(N))$ ist injektiv mit Bild

$\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M), \Gamma(N)) := \{ f \in \mathrm{Hom}(\Gamma(M), \Gamma(N)) \mid f$ ist stark cokommut. Cogebra-Hom. und $f(1_{\Gamma(M)}) = 1_{\Gamma(N)} \}$.

b) $\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M), \Gamma(N))$ ist Untergruppe des Monoids $(\mathrm{Hom}(\Gamma(M), \Gamma(N)), \star)$. Obige Abbildung ist Gruppeniso. von $(\mathrm{Hom}(\Gamma^+(M), N), +)$ auf $(\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M), \Gamma(N)), \star)$.

BEW.: a) Daß das Bild von $\mathrm{Hom}(\Gamma^+(M), N)$ in $\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M), \Gamma(N))$ enthalten ist, ist klar nach Definition und 15.1.10..

Für $\psi: \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(N)$ aus $\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M), \Gamma(N))$ definiere

$$\chi: \Gamma^+(M) \xrightarrow[\iota^+ = \text{Einb.}]{} \Gamma(M) \xrightarrow{\psi} \Gamma(N) \xrightarrow{\pi_1} N \quad .$$

$$\chi \circ \pi^+ = \pi_1 \circ \psi \circ \iota^+ \circ \pi^+ = \pi_1 \circ \psi \circ \iota^+ \circ \pi^+ + \pi_1 \circ \psi \circ \iota_0 \circ \pi_0 \quad .$$

($\iota_0: \Gamma_0(M) \longrightarrow \Gamma(M)$ und $\pi_0: \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma_0(M)$ kan. Einb. u. Proj.)

Beachte: $\pi_1 \circ \psi \circ \iota_0 \circ \pi_0(\Gamma(M)) \subset \pi_1 \circ \psi(\Gamma_0(M)) \subset \pi_1(\Gamma_0(N)) = 0$!

Also gilt: $\chi \circ \pi^+ = \pi_1 \circ \psi \circ (\iota^+ \circ \pi^+ + \iota_0 \circ \pi_0) = \pi_1 \circ \psi \circ \mathrm{id}_{\Gamma(M)} = \pi_1 \circ \psi$

Nach 15.1.9. (Eindeutigkeit) folgt daraus $\psi = \overline{\chi}$.

$Cog_c^1(\Gamma(M),\Gamma(N))$ ist somit genau das Bild der Abbildung.

Injektivität: Sei $\psi = \overline{\chi}$ für ein $\chi \in Hom(\Gamma^+(M),N)$.

$\pi_1 \circ \psi \circ \iota^+ = \pi_1 \circ \Gamma(\chi) \circ \Delta^+ \circ \iota^+ = \chi \circ \pi_1 \circ \Delta^+ \circ \iota^+ \underset{14.1.14.b)}{=} \chi \circ id_{\Gamma(M)} = \chi.$

Aus $\overline{\chi}_1 = \overline{\chi}_2$ folgt somit $\chi_1 = \chi_2$.

b) $0 \in Hom(\Gamma^+(M),N)$ wird abgebildet auf $\Gamma(0) \circ \Delta^+ = \pi_0 \circ \Delta^+ = id_R : \Gamma_0(M) \cong R \longrightarrow R \cong \Gamma_0(N)$, das neutrale Element von $(Hom(\Gamma(M),\Gamma(N)),*)$.

$\chi, \psi \in Hom(\Gamma^+(M),N) \Rightarrow \overline{\chi+\psi} = \Gamma(\chi+\psi) \circ \Delta^+ \underset{15.1.14.}{=}$

$= \mu_{\Gamma(N)} \circ (\Gamma(\chi) \underline{\otimes} \Gamma(\psi)) \circ \Delta_{\Gamma(\Gamma^+(M))} \circ \Delta^+ \underset{15.1.7.}{=}$

$= \mu_{\Gamma(N)} \circ (\Gamma(\chi) \underline{\otimes} \Gamma(\psi)) \circ (\Delta^+ \underline{\otimes} \Delta^+) \circ \Delta_{\Gamma(M)} = \mu_{\Gamma(N)} \circ ((\Gamma(\chi) \circ \Delta^+) \underline{\otimes} (\Gamma(\psi) \circ \Delta^+) \circ \Delta_{\Gamma(M)} =$

$= (\Gamma(\chi) \circ \Delta^+) * (\Gamma(\psi) \circ \Delta^+) = \overline{\chi} * \overline{\psi}$.

Als isomorphes Bild der Gruppe $Hom(\Gamma^+(M),N)$ muß $Cog_c^1(...)$ damit Untergruppe von $(Hom(\Gamma(M),\Gamma(N)),*)$ sein. ■

Vor einer weiteren Diskussion ist noch nachzutragen:

15.1.14.LEMMA: Für alle f und g aus $Hom(M,N)$ ist $\Gamma(f+g) = \Gamma(f) * \Gamma(g)$ in $Hom(\Gamma(M),\Gamma(N))$.

BEW.: Eingeschränkt auf $\Gamma_i(M)$ hat $\Gamma(f) * \Gamma(g)$ die Form:

$\mu_{\Gamma(N)} \circ (\sum_{r+s=i} \Gamma_r(f) \underline{\otimes} \Gamma_s(g)) \circ \Delta_{\Gamma(M)} = \sum_{r+s=i} \Gamma_r(f) * \Gamma_s(g) =$

$= \sum_{r+s=i} \beta_\Gamma(f^{[r]}) \beta_\Gamma(g^{[s]}) = \beta_\Gamma(\sum_{r+s=i} f^{[r]} g^{[s]}) = \beta_\Gamma((f+g)^{[i]}) =$

$= \Gamma_i(f+g)$. ■

15.1.15.BEM.: Ist R unendlicher Körper, und sind M und N endlich-dimensionale Vektorräume, so liefert 15.1.13.

speziell einen Gruppen-Monomorphismus zwischen den Polynomabbildungen von M nach N ohne homogenen Anteil vom Grad 0 mit punktweiser Addition als Gruppenoperation in die R-Cogebra-Hom. von $\Gamma(M)$ nach $\Gamma(N)$, die die Eins respektieren, mit der Convolution. Diese Cogebra-Hom. sind dual zu den, üblicherweise Polynomabbildungen von M nach N zugeordneten, R-Algebra-Hom. von $S(N^*)$ nach $S(M^*)$.

15.1.16.KOR.: Die durch $\hat{\psi} \longmapsto \Gamma(\hat{\psi})$ $\forall \hat{\psi} \in \mathrm{Hom}(M,N)$ gegebene Abbildung von $(\mathrm{Hom}(M,N),+)$ in $(\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M),\Gamma(N)),*)$ ist ein injektiver Gruppen-Hom. mit Bild $\mathrm{Cog}_c^1\mathrm{gr}(\Gamma(M),\Gamma(N)) :=$

$= \{ \chi \in \mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M),\Gamma(N)) \mid \chi \text{ ist graduiert vom Grad 0} \}$.

BEW.: Wie schon in 15.1.12. wird $\hat{\psi} \in \mathrm{Hom}(M,N)$ das Element $\psi := \hat{\psi} \circ \pi_1 \in \mathrm{Hom}(\Gamma^+(M),N)$ zugeordnet. Dies liefert einen injektiven Gruppen-Hom. (vgl. auch 15.1.14.) mit Bild $B :=$

$= \{ \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma^+(M),N) \mid \bigoplus_{i>1} \Gamma_i(M) \subset \mathrm{Kern}(\chi) \}$. Nach 15.1.12 bleibt zu zeigen:

$$\forall \psi \in \mathrm{Cog}_c^1\mathrm{gr}(\Gamma(M),\Gamma(N)): \pi_1 \circ \psi \in B .$$

Dies ist jedoch klar, da $\pi_1 \circ \psi(\bigoplus_{i>1} \Gamma_i(M)) \subset \pi_1(\bigoplus_{i>1} \Gamma_i(N)) = 0$. ■

15.1.17.BEM.: a) Die R-Modul-Struktur auf $\mathrm{Hom}(M,N)$, die sich, genau wie bei $\mathrm{Hom}(\Gamma^+(M),N)$ auch, natürlich auf die isomorphe Gruppe überträgt, kann , anders als bei Cog_c^1 , auf $\mathrm{Cog}_c^1\mathrm{gr}(\Gamma(M),\Gamma(N))$ auch einfach direkt definiert werden, nämlich durch $r \cdot \psi(\sum_i x_i) := \sum_i r^i \psi(x_i)$ $\forall x_i \in \Gamma_i(M)$, $r \in R$ und $\psi \in \mathrm{Cog}_c^1\mathrm{gr}(\Gamma(M),\Gamma(N))$.

b) Da nach 15.1.16. alle Elemente aus $\mathrm{Cog}_c^1(\Gamma(M),\Gamma(N))$ die Form $\Gamma(\hat{\psi})$ mit $\hat{\psi} \in \mathrm{Hom}(M,N)$ haben, gilt:

$\chi \in Cog^1_C gr(\Gamma(M),\Gamma(N)) \Longrightarrow \chi$ ist Bigebra-Hom..

c) Bei Betrachtung des Beweises stellt man fest, daß in 15.1.16. "χ ist graduiert vom Grad 0" auch durch "χ ist filtrierend" ($\mathfrak{F}_i = \bigoplus_{j \geq i} \Gamma_i(M)$) hätte ersetzt werden können. Es würde eine zu b) analoge Implikation gelten.

15.1.18.DEF.: Für einen R-Modul-Hom. $\psi:\Gamma(M) \longrightarrow N$ sei

$\overline{\overline{\psi}}: \Gamma(M) \longrightarrow \prod_i \Gamma_i(N)$ der durch

$$\overline{\psi}: \Gamma(M) \xrightarrow[\chi]{} \hat{\Gamma}(\Gamma^+(M)) \longrightarrow \prod_i \Gamma_i(\Gamma(M)) \xrightarrow{(\Gamma_i(\psi))_i} \prod_i \Gamma_i(N)$$

definierte R-Modul-Hom., also $\overline{\psi} = \prod_{i \in \mathbb{N}_0} \Gamma_i(\psi) \circ \chi_{i-1}$.

15.1.19. Ist $\psi:\Gamma(M) \longrightarrow N$ R-Modul-Hom. mit $\psi(\Gamma_0(M))=0$, so gilt: $\overline{\psi}(\Gamma(M)) \subset \Gamma(N)$ und $\overline{\psi}|_{.,\Gamma(N)} = \overline{(\psi|_{\Gamma^+(M)})}$.

BEW.: $\psi = \psi|_{\Gamma^+(M)} \circ \pi^+ \Longrightarrow \Gamma_i(\psi) = \Gamma_i(\psi|_{\Gamma^+(M)}) \circ \Gamma_i(\pi^+) \Longrightarrow$

$\overline{\psi} \underset{14.1.12.}{=} (\Gamma_i(\psi|_{\Gamma^+(M)}))_i \circ \Delta^+$

$\Longrightarrow \overline{\psi}|_{.,\Gamma(N)} = \Gamma(\psi|_{\Gamma^+(M)}) \circ \Delta^+ = \overline{(\psi|_{\Gamma^+(M)})}$. ■

15.1.20. $\forall \psi \in Hom(\Gamma(M),N): \pi_1 \circ \overline{\psi} = \psi$.

BEW.: $\pi_1 \circ \overline{\psi} = \pi_1 \circ (\Gamma_i(\psi))_i \circ \chi = \Gamma_1(\psi) \circ \pi_1 \circ \chi = \psi \circ \chi_0 = \psi$ nach 14.1.4.b). ■

Ein Beispiel für ein ψ mit $\psi(\Gamma_0(M)) \neq 0$, das in mehreren Varianten auftritt ist das folgende:

1) Für einen R-Modul M läßt sich die Abbildung M –> M⊕R mit

$m \longmapsto (m,1_R)$ = "$m+1_R$" zu einem Polynomgesetz von M nach M⊕R erweitern. Der zugehörige R-Modul-Hom. $\underline{\underline{\zeta_{MR}}}:\Gamma(M) \longrightarrow M\oplus R$ hat das Aussehen:

$$\zeta_{MR}\Big|_{\Gamma_0(M)} : \Gamma_0(M)\cong R \hookrightarrow M\oplus R ;$$

$$\zeta_{MR}\Big|_{\Gamma_1(M)} : \Gamma_1(M)\cong M \hookrightarrow M\oplus R ; \qquad \zeta_{MR}\Big|_{\Gamma_i(M)} = 0 \quad \forall i>1$$

$$\overline{\zeta_{MR}}\Big(\prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \Big(\Gamma_j(\zeta_{MR})\Big(1^{[j-|\gamma|]} \prod_p \Big(\prod_i m_i^{[p_i]}\Big)^{[\gamma_p]}\Big)\Big)_j$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_{p\neq 0}} \Big(\zeta_{MR}\Big(1_R^{[j-|\gamma|]} \prod_p \zeta_{MR}\Big(\prod_i m_i^{[p_i]}\Big)^{[\gamma_p]}\Big)\Big)_j \qquad \sum_i p_i = \sum_i p_i > 0$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_{p\neq 0}} \Big((0,1_R)^{[j-|\gamma|]} \prod_p \Big(\zeta_{MR}\Big|_{\Gamma_1'(M)}\Big(\prod_i m_i^{[p_i]}\Big)\Big)^{[\gamma_p]}\Big)_j =$$

$$= \Big((0,1_R)^{[j-|\alpha|]} \prod_i (m_i,0)^{[\alpha_i]}\Big)_j .$$

<u>15.1.21.</u> $\overline{\zeta_{MR}}$ stimmt mit h aus 13.3. überein und kann insbesondere fortgesetzt werden auf $\prod_i \Gamma_i(M)$. (vgl. $\overline{h}$ in 13.3.)

2) Für R-Algebren (A,μ_A,η_A) und (B,μ_B,η_B) sei

$\underline{\underline{\zeta_{AB}}}:\Gamma(A) \longrightarrow A\oplus B$ gegeben durch $\zeta_{AB} := (id_A,\eta_B)\circ\zeta_{AR}$.

ζ_{AB} gehört dann zu dem Polynomgesetz $a \longmapsto (a,1_B)$, und für $\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(A)$ gilt: $\overline{\zeta_{AB}}\Big(\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}\Big) = \Big((0,1_B)^{[j-|\alpha|]} \prod_i (a_i,0)^{[\alpha_i]}\Big)_j$

3) Für eine R-Algebra A sei $\underline{\underline{\zeta_A}}:\Gamma(A) \longrightarrow A$ definiert durch $\zeta_A := "+"\circ\zeta_{AA}$, wobei $"+":A\oplus A \longrightarrow A$ die Addition in A bezeichne.

ζ_A gehört zum Polynomgesetz $a \longmapsto a+1_A$ von A nach A.

$$\overline{\zeta_A}\Big(\prod_{i\in I} a_i^{[\alpha_i]}\Big) = \Big(1_A^{[j-|\alpha|]} \prod_i a_i^{[\alpha_i]}\Big)_j .$$

15.1.22. $\overline{\zeta_A}$ stimmt mit $Sh:\Gamma(A) \longrightarrow \hat{\Gamma}(A) \subset \prod_j \Gamma_j(A)$ überein.

(Vgl. auch 13.3. Anw. b).)

15.2. Sind $\chi:\Gamma(M) \longrightarrow N$ und $\psi:\Gamma(N) \longrightarrow L$ R-Modul-Hom., dann können im allgemeinen $\overline{\chi}$ und $\overline{\psi}$ nicht komponiert werden.

1. Ausnahme: $\chi(\Gamma_0(M))=0$.

   Dann gilt $\overline{\chi}(\Gamma(M)) \subset \Gamma(N)$ und $\overline{\psi}\circ\overline{\chi}$ ist definiert.

2. Ausnahme: $\overline{\psi} = \sum_{i\in \underline{k}} \overline{\psi}_i$ mit $k\in\mathbb{N}$ und $\overline{\psi}_i \in \mathrm{Hom}(\Gamma_i(N), \prod_j \Gamma_j(L))$.

   Dann wird $\overline{\psi}$ durch $\sum_{i\in\mathbb{N}_o} \overline{\psi}\circ\pi_i$ auf ganz $\prod_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_i(N)$ fortgesetzt und man kann $(\sum_{i\in\mathbb{N}_o} \overline{\psi}\circ\pi_i)\circ\overline{\chi} : \prod_j \Gamma_j(M) \longrightarrow \prod_j \Gamma_j(L)$ bilden.

Dieser 2. Fall läßt sich zur Komposition von Polynomgesetzen im Sinne von [Rob 63] verallgemeinern.

Für R-Moduln X,Y sei $\underline{\underline{L'(\Gamma(X),Y)}} := \{ f\in\mathrm{Hom}(\Gamma(X),Y) \mid \forall \text{endl.-erz. Untermoduln } X' \text{ von } X\ \exists m\in\mathbb{N}_o\ \forall j\geq m: f(\Gamma(\iota)(\Gamma_j(X'))) = 0 \}$.

Dabei ist $\iota:X' \longrightarrow X$ die kan. Einbettung. (Vgl. [Rob 63] IV)

15.2.1. LEMMA: Für $\chi\in L'(\Gamma(M),N)$ und $\psi\in L'(\Gamma(N),L)$ gilt:

$\forall x\in\Gamma(M)\ \forall k\in\mathbb{N}_o\ \exists n\in\mathbb{N}_o\ \forall j\geq n : \pi_k\circ\overline{\psi}\circ\pi_j\circ\overline{\chi}(x) = 0$.

$\sum_{j\in\mathbb{N}_o} \overline{\psi}\circ\pi_j\circ\overline{\chi} : \Gamma(M) \longrightarrow \prod_k \Gamma_k(L)$ ist also wohldefiniert.

BEW.: Mit $x := \prod_{i\in I} m_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma(M)$ gilt: $\overline{\psi}\circ\pi_j\circ\overline{\chi}(x) =$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p \in \nabla(I,\alpha)} \overline{\psi}(\chi(1_\Gamma)^{[j-|\gamma|]} \prod_p \chi(\prod_i m_i^{[p_i]})^{[\gamma_p]}) =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_0^{(I)}} | \sum_p p_i\gamma_p=\alpha_i \ \forall i\in I;\ \sum_p \gamma_p=j\}} \overline{\psi}(\prod_p \chi(\prod_i m_i^{[p_i]})^{[\gamma_p]}) =$$

$$= \sum_{(\gamma_p)_p} \sum_{\{(\eta_q)_{q\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N}_0^{(I)})} | \sum_q q_p\eta_q=\gamma_p\}} \prod_q \psi(\prod_p \chi(\prod_i m_i^{[p_i]})^{[q_p]})^{[\eta_q]} =$$

$$= \sum_{\{(\eta_q)_{q\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N}_0^{(I)})} | \sum_{p\in\mathbb{N}_0^{(I)}} \sum_q q_p\eta_q = j;\ \sum_p p_i \sum_q q_p\eta_q = \alpha_i \ \forall i\in I\}} \prod_q \psi(\prod_p \chi(\prod_i m_i^{[p_i]})^{[q_p]})^{[\eta_q]} =: Z .$$

Da die m_i mit $\alpha_i \neq 0$ einen endlich-erzeugten Untermodul von M aufspannen, gilt:

(1) $\chi(\prod_i m_i^{[p_i]}) = 0$ falls $\sum_i p_i > c$ (geeignet)

Die $\chi(\prod_i m_i^{[p_i]})$ mit $\sum_i p_i \leq c$ (und $p_i=0$ falls $\alpha_i=0$) spannen aber einen endlich erzeugten Untermodul von N auf, und es gilt somit:

(2) $\psi(\prod_p \chi(\prod_i m_i^{[p_i]})^{[q_p]}) = 0$ falls $\sum_p q_p > d$ (geeignet)

Die Summation in Z braucht also nicht über solche p bzw. q mit (1) bzw (2) zu laufen. Für die verbleibenden ergibt sich aus der Summationsbedingung:

$$\sum_i \alpha_i = \sum_i \sum_p p_i \sum_q q_p\eta_q \leq c \sum_q \sum_p q_p\eta_q \leq cd \sum_q \eta_q \text{ , sowie}$$

$$j = \sum_q \sum_p q_p\eta_q \leq d \sum_q \eta_q .$$

Ist also $\sum_q \eta_q = k$, so folgt $j \leq dk$, so daß für alle $j > dk$ die

Summationsbedingung nicht erfüllt werden kann, die Summe also 0 ist. ■

15.2.2.DEF.: Für $\chi\in L'(\Gamma(M),N)$ und $\psi\in L'(\Gamma(N),L)$ sei $\overline{\overline{\psi}}(\overline{\chi}):\Gamma(M)\longrightarrow\prod_i \Gamma_i(L)$ definiert als $\overline{\psi}(\overline{\chi}) := \sum_{i\in\mathbb{N}_o} \overline{\psi}\circ\pi_i\circ\overline{\chi}$ und werde als "Komposition" von $\overline{\psi}$ und $\overline{\chi}$ bezeichnet.

15.2.3. $$\overline{\psi}(\overline{\chi})\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \sum_{\{(\eta_q)_{q\in\mathbb{N}_o^{(\mathbb{N}_o^{(I)})} \mid \sum_{p\in\mathbb{N}_o^{(I)}} p_i \sum_q q_p\eta_q = \alpha_i \ \forall i\in I\}} \prod_q \psi\Big(\prod_p \chi\Big(\prod_i m_i^{[p_i]}\Big)^{[q_p]}\Big)^{[\eta_q]}$$

15.2.4.LEMMA: Für $\chi\in L'(\Gamma(M),N)$ und $\psi\in L'(\Gamma(N),L)$ gilt:

$$\overline{\pi_1\circ\overline{\psi}(\overline{\chi})} = \overline{\psi}(\overline{\chi}) .$$

BEW.: $\overline{\pi_1\circ\overline{\psi}(\overline{\chi})} = \overline{\sum_j \psi\circ\pi_j\circ\overline{\chi}} =: f.$ $f\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) =$

$$= \sum_{\{(\gamma_r)_{r\in\mathbb{N}_o^{(I)}} \mid \sum_r r_i\gamma_r = \alpha_i \ \forall i\in I\}} \prod_r \Big(\sum_j \psi\circ\pi_j\circ\overline{\chi}\Big(\prod_i m_i^{[r_i]}\Big)\Big)^{[\gamma_r]} =$$

$$= \sum_{(\gamma_r)_r} \prod_r \Big(\sum_{\{(\gamma_{rj})_{j\in\mathbb{N}_o} \mid \sum_j \gamma_{rj}=\gamma_r\}} \prod_j \psi\circ\pi_j\circ\overline{\chi}\Big(\prod_i m_i^{[r_i]}\Big)^{[\gamma_{rj}]}\Big) =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_{rj})_{r\in\mathbb{N}_o^{(I)};\, j\in\mathbb{N}_o} \mid \sum_r r_i \sum_j \gamma_{rj} = \alpha_i \ \forall i\in I\}} \prod_r \prod_j \psi\circ\pi_j\circ\overline{\chi}\Big(\prod_i m_i^{[r_i]}\Big)^{[\gamma_{rj}]} .$$

$$\psi\circ\pi_j\circ\overline{\chi}\Big(\prod_i m_i^{[r_i]}\Big)^{[\gamma_{rj}]} = \psi\circ\Gamma_j(\chi)\circ\mathfrak{X}_{j-1}\Big(\prod_i m_i^{[r_i]}\Big)^{[\gamma_{rj}]} =$$

$$= \Bigg(\sum_{\{(\eta_q)_{q\in\mathbb{N}_o^{(I)}} \mid \sum_q \eta_q = j \;;\; \sum_q q_i\eta_q = r_i \;\forall i\in I\}=:X_{rj}} \psi\Big(\prod_q \chi\Big(\prod_i m_i^{[q_i]}\Big)^{[\eta_q]}\Big)\Bigg)^{[\gamma_{rj}]} =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_{rj}^{\eta})_{\eta\in X_{rj}} \mid \sum_{\eta\in X_{rj}} \gamma_{rj}^{\eta}=\gamma_{rj}\;\forall r,j\}} \prod_{\eta\in X_{rj}} \psi\Big(\prod_q \chi\Big(\prod_i m_i^{[q_i]}\Big)^{[\eta_q]}\Big)^{[\gamma_{rj}^{\eta}]} .$$

$$\Longrightarrow \quad f\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) =$$

$$= \sum_{(\gamma_{rj})_{r,j}} \sum_{(\gamma_{rj}^{\eta})_{\eta,r,j}} \prod_{r,j} \prod_{\eta\in X_{rj}} \psi\Big(\prod_q \chi\Big(\prod_i m_i^{[q_i]}\Big)^{[\eta_q]}\Big)^{[\gamma_{rj}^{\eta}]} =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_{rj}^{\eta})_{r\in\mathbb{N}_o^{(I)};\, j\in\mathbb{N}_o;\, \eta\in X_{rj}} \mid \sum_r r_i \sum_j \sum_{\eta\in X_{rj}} \gamma_{rj}^{\eta} = \alpha_i \;\forall i\in I\}} \prod_{r,j} \prod_{\eta\in X_{rj}} \psi\Big(\prod_q \chi\Big(\prod_i m_i^{[q_i]}\Big)^{[\eta_q]}\Big)^{[\gamma_{rj}^{\eta}]} =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_\eta)_{\eta\in\mathbb{N}_o^{(I)}} \mid \sum_\eta \sum_q q_i\eta_q\gamma_\eta=\alpha_i\;\forall i\in I\}} \prod_\eta \psi\Big(\prod_q \chi\Big(\prod_i m_i^{[q_i]}\Big)^{[\eta_q]}\Big)^{[\gamma_\eta]} . \blacksquare$$

Aus dem Beweis sei noch festgehalten:

<u>15.2.5.</u> $$\sum_j \psi\circ\pi_j\circ\overline{\chi}\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) = \sum_j \psi\circ\Gamma_j(\chi)\circ\mathfrak{X}_{j-1}\Big(\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\Big) =$$

$$= \sum_{\{(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}_o^{(I)}} \mid \sum_p p_i\gamma_p=\alpha_i\;\forall i\in I\}} \psi\Big(\prod_p \chi\Big(\prod_i m_i^{[p_i]}\Big)^{[\gamma_p]}\Big)$$

(für $\chi\in L'(\Gamma(M),N)$, $\psi\in L'(\Gamma(N),L)$ und $\prod_i m_i^{[\alpha_i]}\in\Gamma(M)$)

15.2.7.LEMMA: Für $\chi \in L'(\Gamma(M),N)$ und $\psi \in L'(\Gamma(N),L)$ ist

$$\pi_1 \circ \overline{\psi}(\overline{\chi}) = \sum_j \psi \circ \pi_j \circ \overline{\chi} \in L'(\Gamma(M),L).$$

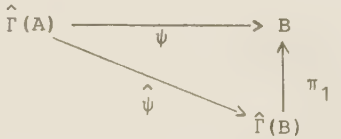
BEW.: Betrachte 15.2.5.! Wie im Beweis von 15.2.1. kann man annehmen: $\sum_i p_i \leq c$ und $\sum_p \gamma_p \leq c'$ mit c,c' geeignet, fest . $\sum_i \alpha_i = \sum_p \sum_i p_i \gamma_p \leq c \sum_p \gamma_p \leq cc'$. Für ein endliches System $m_1,\ldots,m_l \in M$ ist also: $\sum_j \psi \circ \pi_j \circ \overline{\chi} \left(\prod_{i \in \underline{l}} m_i^{[\alpha_i]} \right) = 0$, falls $\sum_i \alpha_i > cc'$ ist. ■

15.2.7.BEM.: Tatsächlich gehört, falls χ zum Polynomgesetz f von M nach N und ψ zum Polynomgesetz g von N nach M gehört, $\pi_1 \circ \overline{\psi}(\overline{\chi}) = \sum_j \psi \circ \pi_j \circ \overline{\chi} : \Gamma(M) \longrightarrow \prod_i \Gamma_i(N)$ zum Polynomgesetz $g \circ f$. Insbesondere wird die Komposition von Formen aus [Schm 71]3.3 miterfaßt.

15.3. A sei wieder eine R-Algebra. Aus 14.2.6. und 14.2.11. folgt sofort:

15.3.1.SATZ: Für alle R-Algebra-Homomorphismen $\psi : \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow B$ existiert genau ein stark cokommutativer Cogebra-Hom. $\hat{\psi}$, so daß folgendes Diagramm kommutiert.

(D_4)



$\hat{\psi}$ ist sogar Bigebra-Homomorphismus.

BEW. 1) Eindeutigkeit: $\hat{\psi} = id_{\hat{\Gamma}(B)} \circ \hat{\psi} \underset{14.2.3.}{=} \hat{\Gamma}(\pi_1) \circ \hat{\Delta} \circ \hat{\psi} =$

$= \prod_i \Gamma_i(\pi_1) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \circ \hat{\psi} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(B)} \overset{\hat{\psi} \text{ stark cokommut.}}{=}$

$= \prod_i \Gamma_i(\pi_1) \circ \Gamma_{i-1}(\hat{\psi}) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(B)} = \prod_i \Gamma_i(\psi) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(B)} = \hat{\Gamma}(\psi) \circ \hat{\Delta}$.

2) Existenz: $\hat{\Gamma}(\psi)$ und $\hat{\Delta}$ sind stark cokommutative Cogebra-Hom.. $\hat{\psi} := \hat{\Gamma}(\psi) \circ \hat{\Delta}$ ist also der gesuchte Hom..

3) Aus der Def. $\hat{\psi} = \hat{\Gamma}(\psi) \circ \hat{\Delta}$ folgt, das $\hat{\psi}$ R-Algebra-Hom. ist und damit Bigebra-Hom.. ■

15.1.2.SATZ: Sind A^+ und B^+ R-Algebren ohne Eins, so existiert für jeden R-Modul-Hom. $\psi^+ : \hat{\Gamma}^+(A^+) \longrightarrow B^+$, für den $\psi := (\psi^+, id_R) : \hat{\Gamma}(A^+) \longrightarrow B^+ \hat{\oplus} R$ R-Algebra-Hom. ist, (bzw. für einen R-Algebra-Hom. $\psi : \hat{\Gamma}(A^+) \longrightarrow B^+ \hat{\oplus} R$ mit $\psi(\hat{\Gamma}^+(A^+)) \subset B^+$ und $\psi^+ := \psi \Big|_{\hat{\Gamma}^+(A^+), B^+}$) genau ein stark cokommutativer R-Cogebra-Hom. $\hat{\psi} : \hat{\Gamma}(A^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(B^+)$, so daß folgendes Diagramm kommutiert.

(D_5)

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(A^+) & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & B^+ \hat{\oplus} R \\ \Big\downarrow \hat{\psi} & & \Big\uparrow \pi_1 \\ \hat{\Gamma}(B^+) & \xrightarrow{\text{Einb.}} & \hat{\Gamma}(B^+ \hat{\oplus} R) \end{array}$$

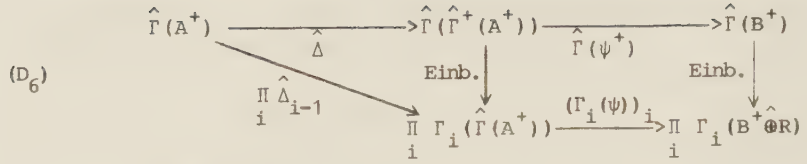
$\hat{\psi}$ ist dann sogar Bigebra-Homomorphismus.

BEW.: 1) Eindeutigkeit: $\hat{\psi} = id_{\hat{\Gamma}(B^+)} \circ \hat{\psi} \underset{14.2.16.}{=}$

$= \prod_i \Gamma_i(\pi_1 \circ \text{Einb.}) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \circ \hat{\psi} \Big|_{.,\hat{\psi}(B^+)} \overset{\text{stark cokommut.}}{=}$

$= \prod_i \Gamma_i(\pi_1 \circ \text{Einb.} \circ \hat{\psi}) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(B^+)} \underset{(D_5)}{=} \prod_i \Gamma_i(\psi) \circ \hat{\Delta}_{i-1} \Big|_{.,\hat{\Gamma}(B^+)} =$

$= \hat{\Gamma}(\psi^+) \circ \hat{\Delta}$, wegen der Kommutativität des folgenden Diagr.:



2) Existenz: $\hat{\Gamma}(\psi^+) \circ \hat{\Delta}$ ist stark cokommutativer Cogebra-Hom. nach 15.1.5. und 15.1.8. . Der Rest ist klar. ■

KAPITEL 16 : Die Algebra $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ der "symmetrischen Funktionen".

Als ersten Schritt auf dem Wege zu einer "Algebra der verallgemeinerten Spurpolynome" wird hier die kommutative Algebra $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ betrachtet, die sich als natürlich isomorph zur "Algebra der symmetrischen Funktionen in abzählbar vielen Variablen" herausstellt.
$\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ist damit ein Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten.
Da durch $X \longmapsto a \in A$ gegebene R-Algebra-Homomorphismen $R[X] \to A$ solche von $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ nach $\hat{\Gamma}(A)$ liefern, kann man Aussagen über symmetrische Polynome nach $\hat{\Gamma}(A)$ übertragen. Als Beispiel wird hier die gemeinsame Herleitung von Newtonschen-Formeln und Cayley-Hamilton Theorem für Matrizen ausgeführt. Abschließend werden noch einige Rechnungen für den Char p>0-Fall vorgenommen.

16.1. Die Struktur von $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$.

Zunächst werden einige Bezeichnungen eingeführt:

16.1.1.DEF.: a) Für $j\in\mathbb{N}_o$ und $\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}$ sei

$\underline{\underline{m(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots)}} := (X^1)^{<\alpha_1>}(X^2)^{<\alpha_2>}\ldots$ die "monomsymmetrische Funktion" zur Partition $1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots$" in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$.

b) Für $i\in\mathbb{N}_o$ sei $\underline{\underline{e_i}} := m(1^i) = X^{<i>}$ die "i-te elementarsymmetrische Funktion" in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$.

c) Für $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_r$ $(\lambda_i\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N})$ sei

$\underline{\underline{e(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}} := e_{\lambda_1}\ldots e_{\lambda_r}\in\hat{\Gamma}(R[X]^+)$.

16.1.2. a) $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ist kommutative R-Algebra (vgl. 3.1.7.).

b) $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ hat als R-Modul die Basis

$$B:=\{\, m(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots) \mid \alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}\ ,\ j\in\mathbb{N}_o\}. \quad (1.2.6.)$$

c) $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ist graduierte R-Algebra mit homogenen Komponenten $B_j := [\{m(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots) \mid \alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}\}]_R$ $(j\in\mathbb{N}_o)$.

BEW. von c): $\hat{\Gamma}(R[X]^+) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} B_j$ mit

$B_j := Sh\circ\xi^{-1}\big(\bigoplus_{\alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}}\ \bigotimes_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_{\alpha_i}(RX^i)\big)$ ist graduierte R-Algebra nach 13.2.9.. $\Gamma_{\alpha_i}(RX^i)$ hat die Basis $\{(X^i)^{<\alpha_i>}\}$. B_j hat also die Basis $\{\prod_{i\in\mathbb{N}}(X^i)^{<\alpha_i>} \mid \alpha\in\tilde{P}_{j,\mathbb{N}}\}$. ■

16.1.3.LEMMA: (vgl. [MacDo 79]2.3.)

Für $\lambda_i\in\mathbb{N}$ mit $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_r$ und $m:=\lambda_1+..+\lambda_r$ gilt:

$$e(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) = m(1^{(\lambda_1-\lambda_2)}2^{(\lambda_2-\lambda_3)}\ldots(r-1)^{(\lambda_{r-1}-\lambda_r)}r^{\lambda_r} +$$

+ R-Linearkombination von Elementen $m(1^{\zeta_1}2^{\zeta_2}\ldots r^{\zeta_r})$ mit $\zeta\in\tilde{P}_{m,r}$ und $(\zeta_r,\zeta_{r-1},\ldots,\zeta_1) < (\lambda_r,\lambda_{r-1}-\lambda_r,\ldots,\lambda_1-\lambda_2)$ in der lexikographischen Ordnung.

BEW.: $1(\lambda_1-\lambda_2)+2(\lambda_2-\lambda_3)+\ldots+(r-1)(\lambda_{r-1}-\lambda_r)+r\lambda_r = \sum_{i\in\underline{r}} \lambda_i = m$.

Daß nur ζ mit $\zeta\in\tilde{P}_{m,\mathbb{N}}$ auftreten können ist klar, da $\operatorname{grad}(e_{\lambda_i}) = \lambda_i$ ist, und somit (wegen 16.1.2.c)) $\operatorname{grad}(e(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)) = m$ sein muß. Beim Ausmultiplizieren der e_{λ_i} können nur Summanden $\prod_{i\in\underline{r}} (X^i)^{<\zeta_i>}$ auftreten, da nur r Faktoren $X^{<j>}$ $(j=\lambda_i)$ zur Verfügung stehen. Dabei kann ζ_r maximal den Wert λ_r annehmen ($\lambda_r \leq \lambda_i$ $\forall i$). Für ζ_{r-1} bleiben in diesem Fall maximal $\lambda_{r-1}-\lambda_r$ übrig; u.s.w.. ■

16.1.4.KOR.: $\{ e(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \mid \lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_r \; ; \; \lambda_i, r\in\mathbb{N}; \; \lambda_1+\ldots+\lambda_r=m\}$ ist Basis von B_m (vgl. 16.1.2.c)). (m>0)

BEW.: Folgerung aus 16.1.3. und A.I.1., da $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \longmapsto (\lambda_r,\lambda_{r-1}-\lambda_r,\ldots,\lambda_2-\lambda_1)$ sogar eine Bijektion definiert. ■

16.1.5.SATZ: $\hat{\Gamma}(R[X]^+) \cong R[e_i]_{i\in\mathbb{N}}$ als R-Algebra.
$\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ist also eine kommutative Polynomalgebra in abzählbar vielen Unbestimmten.

BEW.: Folgt sofort aus 16.1.4. und 16.1.2.c). ■

$T_n(R[X]) = R[X]\otimes R[X]\otimes\ldots\otimes R[X]$ (n-mal) trägt die Struktur einer R-Algebra (Tensorproduktstruktur).

$\nu_n: T_n(R[X]) \longrightarrow R[X_1,\ldots,X_n]$ sei der durch

$X^{i_1} \otimes X^{i_2} \otimes \ldots \otimes X^{i_n} \longmapsto X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n}$ auf einer Basis definierte R-Modul-Hom. ν_n ist sogar ein R-Algebra-Hom. und, da Basis auf Basis abgebildet wird, ein Isomorphismus.

$R[X_1,\ldots,X_n]$ trägt eine Links-Σ_n-Modul-Struktur, die durch

$(\sigma, X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n}) \longmapsto X_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} X_2^{i_{\sigma^{-1}(2)}} \ldots X_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}}$ gegeben wird.

ν_n ist auch Σ_n-Homomorphismus .

Für $\sigma \in \Sigma_n$ gilt:

$$X_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} X_2^{i_{\sigma^{-1}(2)}} \ldots X_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}} = \prod_{\sigma^{-1}(j)=k \Longleftrightarrow j=\sigma(k)} X_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{i_n} .$$

Σ_n wirkt also durch Vertauschung der Variablen.

Identifiziert man $\Gamma_n(R[X])$ mit den symmetischen Tensoren in $T_n(R[X])$, so erhält man:

16.1.6. a) $\nu_n(\Gamma_n(R[X]))$ = Menge der symmetrischen Polynome in den Variablen $X_1,\ldots,X_n$.

b) $\nu_n(X^{[i]_1 [n-i]}) = \nu_n(\sum_{\sigma \in K(i,n-i)} \overline{\sigma}(x^{\otimes i} \otimes 1^{\otimes n-i})) =$

$= \sum_{\sigma \in K(i,n)} X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \ldots X_{\sigma(i)}$ = i-tes elementarsymm. Polynom in $X_1,\ldots,X_n$.

Da die $X^{<i>}$ $(i \in \mathbb{N})$ die R-Algebra $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ erzeugen, und $\pi_n: \hat{\Gamma}(R[X]^+) \longrightarrow (\Gamma_n(R[X]), \tau)$ ein R-Algebra-Epimorphismus ist (13.2.8.), ergibt sich der bekannte Satz:

16.1.7.SATZ: Jedes symmetrische Polynom in $R[X_1,\ldots,X_n]$

läßt sich schreiben als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen. (vgl. etwa [Lan 71] V§9) ■

In [Lan 71 V§9] wird auch die algebraische Unabhängigkeit der elementarsymmetrischen Polynome gezeigt. Man kann diese auch durch die Betrachtung des Kerns $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ von π_n beweisen. Es sei noch einmal ausdrücklich festgehalten (vgl.13.2.7.):

16.1.8.SATZ: $\hat{\Gamma}(R[X]^+)/\mathfrak{T}^+_{n+1} \cong \Gamma_n(R[X]) \cong R[\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n] \cong$

$\cong$ Algebra der symmetrischen Polynome in den Var. $X_1,\ldots,X_n$.

($\bar{e}_i := X^{[i]_1[n-i]}$) ■

Die "Algebra der symmetrischen Funktionen in abzählbar vielen Variablen" bekommt man als inversen Limes, über n, der Algebren der symmetrischen Polynome in n-Variablen in der Kategorie der graduierten R-Algebren (vgl. [MacDo 79] S.12). Nach Satz 13.2.9. gilt also (vgl. auch 16.1.5):

16.1.9.SATZ: $\hat{\Gamma}(R[X]^+) \cong$ Algebra der symmetrischen Funktionen in abzählbar vielen Variablen.

Als weitere spezielle Elemente in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ hat man:

16.1.10.DEF.: $\underline{\underline{h_i}} := \sum_{\lambda \vdash i} m(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots) = \sum_{\lambda \vdash i} (X^1)^{<\lambda_1>}(X^2)^{<\lambda_2>}$

ist die "i-te ($i \in \mathbb{N}$) homogene Potenzsumme".

$\underline{\underline{s_i}} := m(i^1) = (X^i)^{<1>}$ ($i \in \mathbb{N}$) ist die "i-te Potenzsumme"

Für $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$ mit $\lambda_i, r \in \mathbb{N}$ definiert man wie üblich

$$\underline{\underline{h_\lambda}} := \tau_{i \in \underline{r}} h_{\lambda_i} \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{s_\lambda}} := \sum_{i \in \underline{r}} s_{\lambda_i} \quad .$$

Nach Satz 13.4.2. gilt:

16.1.11.SATZ: Ist R ein Körper der Char. 0, so ist
$\{ s_\lambda \mid \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \; ; \; r \in \mathbb{N}_0 \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{N} \; \forall i \in \underline{r} \}$ Basis von $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$. ■

Es gilt: $s_\lambda \in B_m \Longleftrightarrow \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = m$ (B_m wie in 16.1.2.c)

16.1.12.BEM.: Auch $\{h_\lambda \mid \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \; ; r \in \mathbb{N}_0 ; \; \lambda_i \in \mathbb{N} \; ; |\lambda| = m \}$
ist Basis von B_m . (ohne Beweis)

Die Schur-Funktionen werden an späterer Stelle eingeführt. Statt dessen soll hier eine weitere Basis aufgeführt werden, die später noch gebraucht wird und in der Literatur zu den symmetrischen Funktionen anscheinend nicht auftritt.
Aus 13.4.1. folgt sofort:

16.1.13.SATZ: $\{ (X^1)^{<\alpha_1>} (X^2)^{<\alpha_2>} \ldots \mid \alpha \in \mathcal{P}_{m,\mathbb{N}} \}$ ist Basis von B_m . ■

Bevor einige Rechnungen in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ausgeführt werden, soll noch kurz auf die Involution $e_i \longmapsto h_i$ eingegangen werden.
Wegen $\hat{\Gamma}(R[X]^+) \cong R[X^{<i>}]_{i \in \mathbb{N}}$ existiert ein R-Algebra-Hom.
$G: \hat{\Gamma}(R[X]^+) \longrightarrow R[X]$ mit $X^{<i>} \longmapsto X^i \; \forall i \in \mathbb{N}_0$.
Nach 15.1.2. existiert genau ein R-Bigebra-Hom.
$\overline{G}: \hat{\Gamma}(R[X]^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R[X]^+)$ mit $\pi_1 \circ \overline{G} = G$. $\overline{G} = \hat{\Gamma}(G^+) \circ \hat{\Delta}$.

$$\overline{G}(X^{<i>}) = \hat{\Gamma}(G)\Big(\sum_{\alpha\vdash i} (X^{<1>})^{<\alpha_1>}(X^{<2>})^{<\alpha_2>}\dots\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha\vdash i} (X^1)^{<\alpha_1>}(X^2)^{<\alpha_2>}\dots = h_i .$$

$\overline{G}$ ist also die bekannte Involution.

16.2. Newtonsche Formeln und Cayley-Hamilton Theorem.

Die folgende Rechnung in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ergibt den Beweis von Lemma 16.2.1..

$$\sum_{i\in\underline{n}_o} (-1)^{n-i} X^{<i>} \tau (X^{n+1-i})^{<1>} =$$

$$= \sum_{i\in\underline{n}_o} (-1)^{n-1} (X^{n+1-(i-1)})^{<1>} X^{<i-1>} + \sum_{i\in\underline{n}_o} (-1)^{n-i} X^{<i>} (X^{n+1-i})^{<1>} =$$

$$= (-1)^{n-0} (X^{n+1-(0-1)})^{<1><0-1>} X + (-1)^{n-n} X^{<n>} (X^{n+1-n})^{<1>} =$$

$$= (n+1)\ X^{<n+1>} .$$

16.2.1.LEMMA: (Newtonsche Formeln)

$$\forall n\in\mathbb{N}_o : \sum_{i\in\underline{n}_o} (-1)^{n-1} X^{<i>} \tau (X^{n+1-i})^{<1>} = (n+1)\ X^{<n+1>} .\blacksquare$$

16.2.2:KOR.: Für alle R-Algebren A und alle Elemente $a\in A$ gilt für $n\in\mathbb{N}_o$: $\sum_{i\in\underline{n}_o} (-1)^{n-1} a^{<i>} \tau (a^{n+1-i})^{<1>} = (n+1)\ a^{<n+1>}$ in $\hat{\Gamma}(A)$

BEW.: Die universelle Eigenschaft von $R[X]$ liefert einen R-Algebra-Hom. mit $X \longmapsto a$. Anwendung des Funktors $\hat{\Gamma}$ liefert die Beh., da $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R[X])$ ist. $\blacksquare$

Rechnet man nicht in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$, sondern in $\hat{\Gamma}(R\{X,Y\}^+)$, so folgen die Newtonschen Formeln sofort aus einer einfachen Verallgemeinerung.

16.2.3.LEMMA: In $\hat{\Gamma}(R\{X,Y\}^+)$ gilt für alle $n\in\mathbb{N}_0$:

$$\sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i}\, X^{<i>}\ \tau\ (X^{n-i}Y)^{<1>} = X^{<n>}Y^{<1>}.$$

BEW.:
$$\sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i}\, X^{<i>}\ \tau\ (X^{n-i}Y)^{<1>} =$$

$$= \sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i} (X^{n-(i-1)}Y)^{<1>} X^{<i-1>} + \sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i}\, X^{<i>} (X^{n-i}Y)^{<1>} =$$

$$= (-1)^{n-0}\ (X^{n-(0-1)}Y)^{<1>} X^{<0-1>} + (-1)^{n-n}\ X^{<n>} (X^{n-n}Y)^{<1>} = X^{<n>}Y^{<1>}. \blacksquare$$

Aus diesem Lemma folgen nicht nur die Newtonschen Formeln, wenn man nämlich $Y \longmapsto X$ spezialisiert (dies liefert einen R-Algebra-Hom. $\hat{\Gamma}(R\{X,Y\}^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R[X]^+)$), sondern auch die folgende Aussage.

16.2.4.SATZ: (Cayley-Hamilton)
A sei eine R-Algebra und $\psi:\hat{\Gamma}(A) \longrightarrow R$ ein R-Algebra-Hom. mit folgenden Eigenschaften:

1) $\psi(\mathfrak{F}_{n+1}) = 0$

2) $\forall a\in A$: ($(\forall b\in A$: $\psi(ab^{<1>})=0$) $\Longrightarrow$ $a = 0$) .

Dann gilt für alle $a\in A$:

$$\sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i}\, \psi(a^{<i>})\ a^{n-i} = 0 .$$

BEW.: $\forall b\in B$: $\psi(((\ \sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i}\, \psi(a^{<i>})\ a^{n-i}\ )b\ )^{<1>}) =$

$$= \psi(\ \sum_{i\in\underline{n}_0} (-1)^{n-i}\, \psi(a^{<i>})\ (a^{n-i}b)^{<1>}\ ) \overset{\psi \text{ Alg. Hom.}}{=}$$

$= \psi\Big(\sum_{i\in\underline{n}_o} (-1)^{n-i}\, a^{\langle i\rangle}\, \tau\, (a^{n-i}b)^{\langle 1\rangle} \Big) \overset{16.2.3.}{=}$

$= \psi(a^{\langle n\rangle}b^{\langle 1\rangle}) = 0$ nach 1). Die Behauptung folgt aus 2). ■

16.3. $A \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ als Lie-p-Hom. und Frobeniusendomorphismus in Char p>0.

16.3.1.LEMMA: $\forall k\in\mathbb{N}_o$: $X^{\langle 1\rangle^{\tau k}} = \sum_{\alpha\in P_{k,\mathbb{N}}} \frac{k!}{1!^{\alpha_1}2!^{\alpha_2}\ldots}\, X^{1^{\langle\alpha_1\rangle}}X^{2^{\langle\alpha_2\rangle}}\ldots$

BEW. durch Induktion über k: 1) k=0,1: klar.

2) k-1 $\longrightarrow$k>1: Für $j\in\mathbb{N}$ und $\beta\in\mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})}$ mit $|\beta|<\infty$ sei

$b(j,\beta) := \frac{j!}{1!^{\beta_1}2!^{\beta_2}\ldots}$.

$\sum_{\alpha\in P_{k-1,\mathbb{N}}} b(k-1,\alpha)\; X^{1^{\langle\alpha_1\rangle}}X^{2^{\langle\alpha_2\rangle}}\ldots\,\tau\, X^{\langle 1\rangle} =$

$= \sum_{\alpha\in P_{k-1,\mathbb{N}}} b(k-1,\alpha)\,(\alpha_1+1)\, X^{1^{\langle\alpha_1+1\rangle}}X^{2^{\langle\alpha_2\rangle}}X^{3^{\langle\alpha_3\rangle}}\ldots +$

$+ \sum_{\alpha\in P_{k-1,\mathbb{N}}} b(k-1,\alpha) \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha_{i+1}+1)\, X^{1^{\langle\alpha_1\rangle}}\ldots X^{i-1^{\langle\alpha_{i-1}\rangle}}X^{i+1^{\langle\alpha_{i+1}\rangle}}\ldots$

In der Basisdarstellung treten offenbar nur solche Basiselemente $X^{1^{\langle\beta_1\rangle}}X^{2^{\langle\beta_2\rangle}}\ldots$ mit von 0 verschiedenen Koeffizienten auf, für die $\sum_{i\in\mathbb{N}} i\beta_i = k$ ist.

a) $\beta_k\neq 0$: Dann ist $\beta_k=1$ und $\beta_i=0$ für $i\neq k$.

Das Basiselement $X^{k^{\langle 1\rangle}}$ kann (k>1) nur auf eine Weise entstehen, nämlich als $X^{k-1^{\langle 1-1\rangle}}X^{k^{\langle 0+1\rangle}}$. Der Koeffizient ist

dann $b(k-1,(\delta_{i,k-1})_i)\ (0+1) = (k-1)!((k-1)!)^{-1} = 1.$

b) $\beta_k=0$: Das Basiselement $X^{1^{<\beta_1>}}\ldots X^{k-1^{<\beta_{k-1}>}}$ kann in diesem Fall auf verschiedene Weise entstehen.

1.Möglichkeit: $\alpha_1=\beta_1-1$ und $\alpha_j=\beta_j$ für $j\neq 1$.

2.Möglichkeit: $\alpha_i=\beta_i+1$, $\alpha_{i+1}=\beta_{i+1}-1$ für ein $i\in\mathbb{N}$ und $\alpha_j=\beta_j$ für alle $j\neq i,i+1$.

Als Koeffizient ergibt sich damit: $b(k-1,(\beta_1-1,\beta_2,\beta_3,..))\beta_1$

$$+ \sum_{i\in\mathbb{N}} b(k-1,(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_i+1,\beta_{i+1}-1,\beta_{i+2},\ldots))\ \beta_{i+1} =$$

$$= (k-1)!\ \beta_1\ (1!^{(\beta_1-1)}2!^{\beta_2}3!^{\beta_3}\ldots)^{-1} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathbb{N}} (k-1)\ \beta_{i+1}(1!^{\beta_1}2!^{\beta_2}\ldots(i-1)!^{\beta_{i-1}}i!^{(\beta_i+1)}(i+1)!^{(\beta_{i+1}-1)}(i+2)!^{\beta_{i+2}}\ldots)$$

$$= b(k-1,\beta)(1!\beta_1 + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{(i+1)!}{i!}\beta_{i+1}) = b(k-1,\beta)(\sum_{i\in\mathbb{N}} i\beta_i) =$$

$$= k\cdot b(k-1,\beta) = b(k,\beta).\ \blacksquare$$

16.3.2.KOR.: Die Charakteristik von R sei eine Primzahl p.

a) $X^{<1>^{\tau p}} = X^{p^{<1>}}$

b) $\alpha=\sum_h \alpha_h p^h$ mit $0\leq\alpha_h<p \Longrightarrow X^{<1>^{\tau\alpha}} = \tau_h\ (X^{p^h})^{<1>^{\tau\alpha_h}}$

BEW.: b) folgt sofort aus a). Für a) beachte: $\alpha\in\hat{P}_{p,\mathbb{N}}$ mit $\alpha_p\neq 1 \Longrightarrow$ p teilt $b(p,\alpha)$. $\blacksquare$

Mit a) ist insbesondere gezeigt, daß der kan. Homomorphismus $A \longrightarrow \hat{\Gamma}(A)$ in char p ein Lie-p-Hom. ist (vgl.11.2.).

Man kann a) in 16.3.2. einfacher und allgemeiner zeigen,

wenn man zuvor für $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ noch ein Ergebnis hat, daß in der Theorie der Cogebren über Körpern insbesondere für Induktionsbeweise eine wichtige Rolle spielt.

16.3.3.SATZ: Für alle $y\in\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ gilt:

$$\Delta_{\hat{\Gamma}(R[X]^+)}(y) = y \otimes 1_{\hat{\Gamma}(R[X]^+)} + 1_{\hat{\Gamma}(R[X]^+)} \otimes y$$
$$\Longrightarrow \quad y \in \hat{\Gamma}_1(R[X]^+) .$$

BEW.: $y = \sum_\alpha a_\alpha\, m(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots)$ sei die Basisdarstellung von y.

$$\Delta(y)=\sum_\alpha a_\alpha \sum_{j+k=|\alpha|} \sum_{(\alpha_{pq})\in M((\alpha_p)_p;(j,k))} x^{1^{<\alpha_{11}>}x^{2^{<\alpha_{21}>}}\ldots} \otimes x^{1^{<\alpha_{12}>}x^{2^{<\alpha_{22}>}}\ldots}$$

Der Koeffizient eines Basiselements

$b_{\beta,\gamma} := x^{1^{<\beta_1>}x^{2^{<\beta_2>}}\ldots} \otimes x^{1^{<\gamma_1>}x^{2^{<\gamma_2>}}\ldots}$ von $\hat{\Gamma}(R[X]^+)\otimes\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ ergibt sich gerade zu $a_{(\beta_i+\gamma_i)_i}$, da $\alpha_{i1}+\alpha_{i2}=\alpha_i \ \forall i$, falls $(\alpha_{pq})\in M((\alpha_p);(j,k))$.

Nach Vorraussetzung ist

$$\Delta(Y) = \sum_\alpha a_\alpha\, (X^{1^{<\alpha_1>}X^{2^{<\alpha_2>}}\ldots}\otimes 1 + 1\otimes X^{1^{<\alpha_1>}X^{2^{<\alpha_2>}}\ldots}) .$$

Der Koeffizient bei $b_{\beta,\gamma}$ ist hier 0, falls nicht β oder γ gleich 0 sind. Also ist $a_\alpha = 0$ für alle α mit der Eigenschaft: $\exists\beta,\gamma\neq 0 : \alpha_i = \beta_i + \gamma_i \ \forall i\in\mathbb{N}$. Offenbar bleibt für α nur die Möglichkeit $\alpha=(\delta_{ij})_i$ für irgendein j. In diesem Fall ist $m(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots) = X^{j^{<1>}} \in \hat{\Gamma}_1(R[X]^+)$. ■

Wenn sich der Satz auch nicht unmittelbar auf $\hat{\Gamma}(A)$ für eine beliebige R-Algebra A übertragen läßt, so übertragen sich doch daraus gewonnene Ergebnisse, wie etwa das folgende

Lemma und Korollar zeigen.

16.3.4.LEMMA: Ist die Charakteristik von R eine Primzahl p, so gilt für alle $n\in\mathbb{N}_0$: $X^{<n>^{\tau p}} = X^{p^{<n>}}$.
(vgl. [New/Rad 79] Prop.1.5.b)

BEW. durch Induktion über n: Der Fall n=0 ist klar.
n-1 ——>n>0: Durch $\delta(y) := \Delta(y) - y\otimes 1 - 1\otimes y$ wird ein R-Modul-Hom.
$\delta: \hat{\Gamma}^+(R[X]^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R[X]^+)\otimes\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ definiert.

$\delta(y^{\tau p}) = \Delta(y^{\tau p}) - (y^{\tau p}\otimes 1 + 1\otimes y^{\tau p}) = \Delta(y)^{\tau p} - (y\otimes 1 + 1\otimes y)^{\tau p} =$
$\delta(y)^{\tau p}$. Mit $y := X^{<n>}$ ergibt sich:

$$\delta(X^{<n>^{\tau p}}) = \delta(X^{<n>})^{\tau p} = \Big(\sum_{i\in\underline{n-1}} X^{<i>}\otimes X^{<n-i>}\Big)^{\tau p} =$$

$$= \sum_{i\in\underline{n-1}} (X^{<i>}\otimes X^{<n-i>})^{\tau p} = \sum_{i\in\underline{n-1}} X^{<i>^{\tau p}} \otimes X^{<n-i>^{\tau p}} \overset{\text{Ind. Vor.}}{=}$$

$$= \sum_{i\in\underline{n-1}} X^{p^{<i>}} \otimes X^{p^{<n-i>}} = \delta(X^{p^{<n>}}). \text{ Also ist}$$

$\delta(X^{<n>^{\tau p}} - X^{p^{<n>}}) = 0$, was gleichbedeutend ist mit

$\Delta(X^{<n>^{\tau p}} - X^{p^{<n>}}) = (X^{<n>^{\tau p}} - X^{p^{<n>}})\otimes 1 + 1\otimes(X^{<n>^{\tau p}} - X^{p^{<n>}})$.

Aus 16.3.3. folgt damit : $X^{<n>^{\tau p}} - X^{p^{<n>}} \in \hat{\Gamma}_1(R[X]^+)$.

$\pi_1(X^{<n>^{\tau p}} - X^{p^{<n>}}) = \pi_1(X^{<n>})^p - \pi_1(X^{p^{<n>}}) = \delta_{n,1}X^p - \delta_{n,1}X^p = 0$.

$\pi_1\big|_{\hat{\Gamma}_1(R[X]^+)}: \hat{\Gamma}_1(R[X]^+) \longrightarrow R[X]^+$ ist Isomorphismus .

Es folgt die Behauptung. ■

16.3.5.KOR.: Ist die Charakteristik von R eine Primzahl p, so gilt für alle R-Algebren A und für alle Elemente $a\in A$:

$a^{<n>^{\tau p}} = a^{p^{<n>}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. ■

Ist speziell $R = \mathbb{Z}_p$, und ist für eine kommutative R-Algebra A $\underline{\underline{Fro_A}}: A \longrightarrow A$ der "Frobenius-Homomorphismus" mit $a \longmapsto a^p \quad \forall a \in A$, so ist Fro_A ein R-Algebra-Hom. und es gilt:

16.3.6.KOR.: Über $R=\mathbb{Z}_p$ mit p Primzahl ist

$$\hat{\Gamma}(Fro_{\mathbb{Z}_p[X]}) \Big|_{\hat{\Gamma}(\mathbb{Z}_p[X]^+)} , \hat{\Gamma}(\mathbb{Z}_p[X]^+) = Fro_{\hat{\Gamma}(\mathbb{Z}_p[X]^+)}$$

BEW.: Da es sich um R-Algebra-Hom. handelt, reicht die Aussage von 16.3.4. zum Beweis. ■

KAPITEL 17 : Γ und die "Äußere Algebra"; die kanonischen Homomorphismen $\beta_\Lambda: \Gamma(Hom) \longrightarrow Hom(\Lambda,\Lambda)$ und $\tilde{B}_\Lambda: \Gamma(End(R^n)) \longrightarrow \Lambda_n(R^n \oplus R^n)$.

Analog wie für Γ und S gibt es auch für den Funktor "äußere Algebra", Λ, einen kanonischen R-Algebra-Hom. $\beta_\Lambda: \Gamma(EndM) \longrightarrow End(\Lambda(M))$, mit dessen Bedeutung sich das nächste Kapitel eingehend befaßt.

Hier wird die Existenz bewiesen, die Grundlagen für die folgenden Kapitel werden geschaffen und einige Zusammenhänge zu anderen Homomorphismen aufgezeigt. Insbesondere wird auf eine Konstruktion von Procesi (vgl. [Pro 78] u. [DeC/Eis/Pro 80]) eingegangen, die im Zusammenhang mit den in dieser Arbeit nicht behandelten Standard-Doppeltableus auftritt, und die

nichts anderes als eine Variante von β_Λ ist.

17.1. Die Äußere Algebra $\Lambda(M)$ eines R-Moduls M ist sogar eine antikommutative, anticokommutative R-Bigebra (vgl. [Bou 74] III§11.4.). $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N))$ und $\prod_{i\in\mathbb{N}_o} \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N))$ sind daher kommutative Subalgebren von $\mathrm{Hom}(\Lambda(M),\Lambda(N))$. (Die Vorzeichen von antikommut. u. anticokommut. heben sich auf!)

17.1.1. HILFSSATZ: Durch $f \longmapsto \sum_{i\in\mathbb{N}_o} \Lambda_i(f)T^i \quad \forall f\in\mathrm{Hom}(M,N)$ wird ein R-Modul-Hom. von $\mathrm{Hom}(M,N)$ nach $\varepsilon(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N)))$ definiert.

BEW.: Für $f,g\in\mathrm{Hom}(M,N)$, $r\in R$, $x_l\in M$ $\forall l\in\underline{k}$ und $i,j,k\in\mathbb{N}_o$ gilt:

a) $\Lambda_0(f) = id_R = \eta_{\Lambda(N)}\circ\varepsilon_{\Lambda(M)}$.

b) $\Lambda_i(f)\Lambda_j(f)(x_1\wedge\ldots\wedge x_k) = \delta_{i+j,k} \sum_{\sigma\in K(i,j)} \mathrm{sgn}\sigma\, f(x_{\sigma(1)})\wedge\ldots\wedge f(x_{\sigma(k)}) =$

$= \delta_{i+j,k}\,|K(i,j)|\,f(x_1)\wedge\ldots\wedge f(x_k) = \delta_{i+j,k}\,|i,j|\,\Lambda_k(f)(x_1\wedge\ldots\wedge x_k)$

c) $\Lambda_k(rf)(x_1\wedge\ldots\wedge x_k) = rf(x_1)\wedge\ldots\wedge rf(x_k) = r^k\Lambda_k(f)(x_1\wedge\ldots\wedge x_k)$

d) $\Lambda_k(f+g)(x_1\wedge\ldots\wedge x_k) = \mathrm{kan}_\Lambda((f+g)^{\otimes k}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)) \overset{5.2.12.}{=}$

$= \sum_{i+j=k} \sum_{\sigma\in K(i,j)} \mathrm{sgn}\sigma\, \mathrm{kan}_\Lambda((f^{\otimes i}\otimes g^{\otimes j})(x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(k)}) =$

$= \sum_{i+j=k} \sum_{\sigma\in K(i,j)} \mathrm{sgn}\sigma\, \Lambda_i(f)(x_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(i)})\wedge\Lambda_j(g)(x_{\sigma(i+1)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(k)}) =$

$= \sum_{i+j=k} \Lambda_i(f)\Lambda_j(g)(x_1\wedge\ldots\wedge x_k)$. ■

17.1.2. SATZ u. DEF.: Nach der universellen Eigenschaft von

Γ existiert genau ein R-Algebra-Homomorphismus

$$\underline{\underline{\beta_\Lambda}}: \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N)),*) \quad \text{mit}$$

$$f^{[i]} \longmapsto \Lambda_i(f) \quad \forall f\in\mathrm{Hom}(M,N), \forall i\in\mathbb{N}_0 .$$

β_Λ ist offensichtlich graduiert vom Grad 0 und kann nach 1.3.2. zu einem R-Algebra-Hom. von $\prod_i \Gamma_i(\mathrm{Hom}(M,N))$ nach $\prod_i \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N))$ fortgesetzt werden, der wieder mit β_Λ bezeichnet sei.

17.1.3. β_Λ ist natürliche Transformation. Die Diagramme (D_1) und (D_2) kommutieren also für alle $f\in\mathrm{Hom}(M',M)$ und $g\in\mathrm{Hom}(N,N')$. (Bew. geradeaus.)

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\Gamma(f^*)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(M',N)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} \\ \bigoplus_i \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N)) & \xrightarrow{\Gamma(f)^*} & \bigoplus_i \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M'),\Lambda_i(N)) \end{array}$$

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\Gamma(g_*)} & \Gamma(\mathrm{Hom}(M,N')) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} \\ \bigoplus_i \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N)) & \xrightarrow{\Gamma(g)_*} & \bigoplus_i \mathrm{Hom}(\Lambda_i(M),\Lambda_i(N')) \end{array}$$

17.1.4. Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ kommutiert das folgende Diagramm:

(D_3)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N)) & \xrightarrow{\beta_T} & \mathrm{Hom}(T_k(M),T_k(N)) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{kan}_\Lambda)_*} \\ \mathrm{Hom}(\Lambda_k(M),\Lambda_k(N)) & \xrightarrow{(\mathrm{kan}_\Lambda)^*} & \mathrm{Hom}(T_k(M),\Lambda_k(N)) \end{array}$$

BEW.: Für $\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N))$ und $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k \in T_k(M)$ gilt:

$$(\mathrm{kan}_\Lambda)^* \circ \beta_\Lambda(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) = \beta_\Lambda(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) =$$

$$= (\prod_i \Lambda_{\alpha_i}(f_i))(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) =$$

$$= \sum_{\sigma \in K((\alpha_i)_i)} \operatorname{sgn}\sigma \bigwedge_i (f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}) \wedge \ldots \wedge f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)})) =$$

$$= \sum_{\sigma \in K((\alpha_i)_i)} \bigwedge_{j \in \underline{k}} g_{\sigma^{-1}(j)}(m_j) =$$

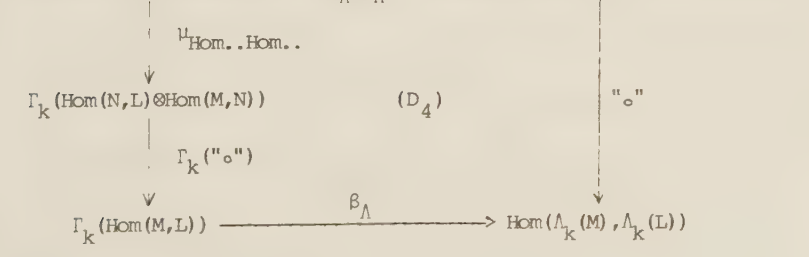
$$= \mathrm{kan}_\Lambda(\sum_{\sigma \in K((\alpha_i)_i)} \bar{\sigma}(\bigotimes_{\underline{i}} f_i^{\otimes})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) =$$

$$= (\mathrm{kan}_\Lambda)_* \circ \beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) .$$

Dabei ist $(g_1,\ldots,g_k) := (f_1,\ldots f_1, f_2,\ldots,f_2,f_3,..)$ (f_i α_i-mal). ■

Die Elemente von $\mathrm{Im}((\mathrm{kan}_\Lambda)_* \circ \beta_T)$ sind demnach alternierend und faktorisieren somit über $\Lambda_k(M)$, was man auch mit Ergebnissen aus Kap. 5 direkt nachrechnen kann.

17.1.5. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ kommutiert das folgende Diagramm:



BEW.: Analog zu 7.1.5..

In Formeln schreibt sich das Lemma so:

17.1.6. $(\prod_i \Lambda_{\alpha_i}(f_i)) \circ (\prod_j \Lambda_{\beta_j}(g_j)) = \sum_{(\gamma_{ij}) \in M((\alpha_i)_i;(\beta_j)_j)} \prod_{i,j} \Lambda_{\gamma_{ij}}(f_i \circ g_j)$

17.1.7.KOR.: $\beta_\Lambda : (\Gamma_k(\mathrm{End}M), \tau) \to (\mathrm{End}(\Lambda_k(M)), \circ)$ ist R-Algebra-Homomorphismus (vgl. [Ive 70] App. zu I). ■

$\Lambda_k(M)$ trägt somit die Struktur eines Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Algebra-Moduls. Es gilt:

17.1.8. $(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) = (\prod_i \Lambda_{\alpha_i}(f_i))(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) =$

$$= \sum_{\sigma \in K_k((\alpha_i)_i)} \mathrm{sgn}\sigma \bigwedge_i (f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)}) \wedge \ldots \wedge f_i(m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}))$$

(für alle $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k \in \Lambda_k(M)$ und $\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(\mathrm{End}M)$)

Ist A R-Algebra und f:A ⟶ EndM R-Algebra-Hom., dann ist M Links-A-Algebra-Modul und

$\Gamma_k(A) \xrightarrow{\Gamma_k(f)} \Gamma_k(\mathrm{End}M) \xrightarrow{\beta_\Lambda} \mathrm{End}(\Lambda_k(M))$ ist R-Algebra-Hom..

$\Lambda_k(M)$ ist also Links-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul.

(Analoges gilt für Rechtsstrukturen.)

17.1.9. $(\prod_i a_i^{[\alpha_i]})(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) =$

$$= \sum_{\sigma \in K_k((\alpha_i)_i)} \mathrm{sgn}\sigma \bigwedge_i (a_i m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i+1)} \wedge \ldots \wedge a_i m_{\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)})$$

(für alle $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k \in \Lambda_k(M)$ und $\prod_i a_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(A)$).

Insbesondere trägt Hom(M,N) eine Links-EndN-Rechts-EndM-

Struktur und damit $\mathrm{Hom}(\Lambda_k(M),\Lambda_k(N))$ eine Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}N)$-Rechts-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Struktur. Aus 17.1.5. folgt sofort:

17.1.10.KOR.: $\beta_\Lambda:\Gamma_k(\mathrm{Hom}(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda_k(M),\Lambda_k(N))$ ist Links-$\Gamma_k(\mathrm{End}N)$-Rechts-$\Gamma_k(\mathrm{End}M)$-Algebra-Modul-Hom.. ■

Wie bei S gibt es auch für Λ einen zweiten Zusammenhang zu Γ:

$\Lambda(M,N) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} (\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(N))$ ist als R-Modul direkter Summand von $\Lambda(M)\otimes\Lambda(N)$ und ist kommutativ als R-Subalgebra von $\Lambda(M)\otimes\Lambda(N)$.

17.1.11.HILFSSATZ: Durch $(m,n) \longmapsto (1_R\otimes 1_R)T^0 + (m\otimes n)T^1$ $\forall m\in M$, $n\in N$ wird eine R-bilineare Abbildung von $M\times N$ in $\varepsilon(\Lambda(M,N))$ definiert.

BEW.: $(m,n) \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}_o} (m^{\wedge k}\otimes n^{\wedge k})T^k$.

a) $(m^{\wedge i}\otimes n^{\wedge i})(m^{\wedge j}\otimes n^{\wedge j}) = m^{\wedge i+j}\otimes n^{\wedge i+j} = [i,j]\, m^{\wedge i+j}\otimes n^{\wedge i+j}$, da für $i+j>1$ beide Seiten 0 sind, und für $i+j=0,1$ $[i,j]=1$ ist.

b) $r((1\otimes 1)T^0 + (m_1\otimes n)T)\cdot s((1\otimes 1)T^0 + (m_2\otimes n)T) =$

$= ((1\otimes 1)T^0 + (rm_1\otimes n)T)\cdot((1\otimes 1)T^0 + (sm_2\otimes n)T) =$

$= (1\otimes 1)T^0 + (rm_1\otimes n + sm_2\otimes n)T + (rm_1\wedge sm_2)\otimes(n\wedge n)\,T^2 =$

$= (1\otimes 1)T^0 + (rm_1+rm_2)\otimes n\, T.$

Der Rest folgt aus Symmetriegründen. ■

17.1.12.SATZ u. DEF.: Nach den universellen Eigenschaften von Tensorprodukt und Γ existiert genau ein R-Algebra-Hom. B_Λ: $\Gamma(M\otimes N) \longrightarrow \Lambda(M,N)$, der für $m\in M$ und $n\in N$ $(m\otimes n)^{[i]}$ abbildet auf $1_{\Lambda(M,N)} = 1_R\otimes 1_R$ für $i=0$, auf $m\otimes n$ für $i=1$ und auf 0 sonst. ■

B_Λ ist graduiert vom Grad 0 und kann damit zu einem R-Algebra-Hom $B_\Lambda: \prod_i \Gamma_i(M\otimes N) \longrightarrow \prod_i(\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(N))$ fortgesetzt werden. Bevor B_Λ näher betrachtet wird, sollen noch die zu (D_8), (D_9) aus 7.2. analogen Beziehungen zwischen β_Λ und B_Λ aufgestellt werden (nur ein Diagramm, wegen der Symmetrie von B_Λ in M und N):

(D_5)

$$\begin{array}{ccc} \oplus_i \Gamma_i(M\otimes N^*) & \xrightarrow{B_\Lambda} & \oplus_i(\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(N^*)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma(\mathrm{kan})} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_{\Lambda_i(M)}\otimes\theta_\Lambda)_i} \\ & & \oplus_i(\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(N)^*) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{kan}} \\ \oplus_i \Gamma_i(\mathrm{Hom}(N,M)) & \xrightarrow{\beta_\Lambda} & \oplus_i \mathrm{Hom}(\Lambda_i(N),\Lambda_i(M)) \end{array}$$

Dabei ist "kan": $X\otimes Y^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y,X)$ gegeben durch $x\otimes f \longmapsto (y \longmapsto f(y)x)$, und θ_Λ ist wie folgt definiert:

17.1.13.DEF.: Ist $\iota: M^* \longrightarrow \Lambda(M)^*$ die kanonische Einbettung in die R-Algebra $(\Lambda(M)^*,*)$, so gilt für alle $f\in M^*$: $f*f(m_1\wedge m_2)=f(m_1)f(m_2)-f(m_2)f(m_1) = 0$.

θ_Λ: $\Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)^*$ sei der nach der universellen Eigenschaft von Λ ([Bou 74] III§7.1. Prop.1) eindeutig bestimmte R-Algebra-Hom., der ι fortsetzt.

BEW. von (D_5): Betrachte $(m\otimes f)^{[i]}$ mit $m\in M$, $f\in N^*$ und $i\in\mathbb{N}_0$. Für $i>1$ ist $B_\Lambda((m\otimes f)^{[i]}) = 0$ und, wie man sich leicht überlegt $\beta_\Lambda\circ\Gamma(\mathrm{kan})((m\otimes f)^{[i]})$ ebenfalls. Für $i=0,1$ ist die Kommutativität evident. ■

17.1.14.BEM.: (D_5) bleibt natürlich kommutativ, wenn man überall "$\oplus$" durch "Π" ersetzt.

Nun also zur Betrachtung von B_Λ !

17.1.15. $$B_\Lambda\Big(\Big(\sum_{i\in\underline{l}} m_i\otimes n_i\Big)^{[k]}\Big) = \pi_k\Big(\prod_{i\in\underline{l}}((1\otimes 1)T^0 + (m_i\otimes n_i)T)\Big) =$$

$$= \begin{cases} m_{i_1}\wedge\ldots\wedge m_{i_k}\otimes n_{i_1}\wedge\ldots\wedge n_{i_k} & \text{falls } k\leq l \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Speziell kann man M und N als endlich-dimensional frei vorraussetzen mit Basen $\{e_i\}_{i\in\underline{m}}$ bzw. $\{f_j\}_{j\in\underline{n}}$. Dann bilden die $\prod_{\substack{i\in\underline{m}\\ j\in\underline{n}}} (e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}$ mit $\sum_{i,j}\alpha_{ij}=k$ eine Basis von $\Gamma_k(M\otimes N)$.

$$B_\Lambda\Big(\prod_{i\in\underline{m}}\prod_{j\in\underline{n}}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}\Big) = \bigwedge_{i\in\underline{m}}\bigwedge_{j\in\underline{n}} B_\Lambda((e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}) =: X$$

$B_\Lambda((e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]})=0$, falls nicht α_{ij} gleich 0 oder 1 ist. Für $\alpha_{ij} = 1$ gilt $B_\Lambda((e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}) = e_i\otimes f_j$. Beim Ausmultiplizieren des Produkts X ergibt sich 0, wenn ein e_i oder f_j mehr als einmal auftritt, genauer, wenn $\sum_i \alpha_{ij}>1$ für ein $j\in\underline{n}$ ist oder $\sum_j \alpha_{ij}>1$ für ein $i\in\underline{n}$.

Wenn also X ungleich 0 ist, so gibt es wegen $\sum_{i,j}\alpha_{ij}=k$ genau eine k×k-Untermatrix $(\alpha_{i_p j_q})_{p,q\in\underline{k}}$ von $(\alpha_{ij})_{i\in\underline{m};j\in\underline{n}}$, die alle von 0 verschiedenen α_{ij} enthält und Permutationsmatrix ist. In diesem Fall gilt:

17.1.16. $$B_\Lambda\Big(\prod_{i,j}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}\Big) = e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\otimes f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_k} .$$

Zwei Spezialfälle von 17.1.16. ergeben sich sofort:

a) $B_\Lambda(\prod_{i\in\underline{m}}\prod_{j\in\underline{n}}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}) = 0$ falls $k>\min(n,m)$;

also $B_\Lambda(\Gamma_k(M\otimes N)) = 0 \quad \forall k>\min(n,m)$.

b) $m=n=k\neq 0 \Longrightarrow B_\Lambda(\prod_{i,j\in\underline{n}}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]})=0$, falls nicht $(\alpha_{ij})_{i,j}$ Permutationsmatrix ist. Ist $(\alpha_{ij})_{i,j\in\underline{n}}$ Permutationsmatrix, und ist σ_α die zugehörige Permutation (vgl. 5.3.) so ergibt sich:

$$e_{\sigma_\alpha(1)}\wedge\ldots\wedge e_{\sigma_\alpha(n)} \otimes f_1\wedge\ldots\wedge f_n = \operatorname{sgn}\sigma \; e_1\wedge\ldots\wedge e_n\otimes f_1\wedge\ldots\wedge f_n.$$

17.2. Eine "modifizierte" Form $\tilde{B}_\Lambda$ von B_Λ ist ebenfalls von Interesse und soll deshalb näher betrachtet werden.
Dazu sind zunächst einige Vorbemerkungen nötig.
Ist $\{e_i\}_{i\in\underline{n}}$ die Standardbasis des R^n und $\{f_j\}_{j\in\underline{n}}$ die dazu duale Basis des $(R^n)^*$, so existiert für alle $k\in\underline{n}_0$ ein Isomorphismus von R-Moduln $\Lambda_k((R^n)^*) \longrightarrow \Lambda_{n-k}(R^n)$ von folgender Form.

17.2.1. $f_{j_1}\wedge f_{j_2}\wedge\ldots\wedge f_{j_k} \longrightarrow (-1)^{\nu_j} e_{l_1}\wedge\ldots\wedge e_{l_{n-k}}$ für alle $j_1<\ldots<j_k$ mit $j_i\in\underline{n}\ \forall i\in\underline{k}$.
Dabei ist $(l_1,\ldots,l_{n-k})$ eindeutig bestimmt durch
1) $l_1<\ldots<l_{n-k}$; 2) $\{j_1,\ldots,j_k,l_1,\ldots,l_{n-k}\}=\underline{n}$,
und ν_j ist definiert durch

$$\nu_j := |\{(p,q)\in\underline{k}\times\underline{n-k} \mid j_p>l_q\}| = (j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k) = \sum_{p\in\underline{k}} j_p - \frac{k(k+1)}{2}$$

(Die Abbildungsvorschrift 17.2.1. stimmt überein mit der für D^k in [Greu 78]6.8. und differiert im Vorzeichen von Φ_p' in [Bou 74]III§11.11 .)

Ferner existiert ein R-Modul-Isomorphismus

$\bigoplus_{k\in\underline{n}_o} (\Lambda_k(R^n)\otimes\Lambda_{n-k}(R^n)) \cong \Lambda_n(R^n\oplus R^n)$ mit

$e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\otimes e_{l_1}\wedge\ldots\wedge e_{l_{n-k}} \longmapsto \bar{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar{e}_{i_k}\wedge e_{l_1}\wedge\ldots\wedge e_{l_{n-k}}$.

Dabei ist $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n,e_1,\ldots,e_n\}$ die Basis des $R^n\oplus R^n$, die sich aus den Standardbasen $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ des ersten und $\{e_1,\ldots,e_n\}$ des zweiten Summanden zusammensetzt. (vgl. auch [Bou 74] III§7.7.)

Zusammengesetzt ergibt sich nun ein Isomorphismus

$\bigoplus_{k\in\underline{n}_o} (\Lambda_k(R^n)\otimes\Lambda_k((R^n)^*)) \cong \Lambda_n(R^n\oplus R^n)$ mit

17.2.2.

$$e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\otimes f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_k} \longrightarrow (-1)^{(\sum_{p\in\underline{k}} j_p - \frac{k(k+1)}{2})}\ \bar{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar{e}_{i_k}\wedge e_{l_1}\wedge\ldots\wedge e_{l_{n-k}}$$

für alle $i_1<\ldots<i_k$, $j_1<\ldots<j_k$ mit $i_p,j_q\in\underline{n}$.

Dabei ist wieder $l_1<\ldots<l_{n-k}$ und $\underline{n}=\{l_1,\ldots,l_{n-k},j_1,\ldots,j_k\}$.

17.2.3.DEF.: $\tilde{B}_\Lambda$: $\Gamma(R^n\otimes(R^n)^*) \longrightarrow \bigoplus_{k\in\underline{n}_o} (\Lambda_k(R^n)\otimes\Lambda_k((R^n)^*)) \cong \Lambda_n(R^n\oplus R^n)$

Für das Aussehen von $\tilde{B}_\Lambda$ ergibt sich nun sofort, wenn $\prod_{i,j\in\underline{n}} (e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}$ aus $\Gamma_k(R^n\otimes(R^n)^*)$ ist:

$\tilde{B}_\Lambda(\prod_{i,j\in\underline{n}} (e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}) = 0$ falls $(\alpha_{ij})_{i,j\in\underline{n}}$ keine k×k-Permutationsmatrix $(\alpha_{i_p j_q})_{p,q\in\underline{k}}$ enthält mit $\alpha_{ij}=0$ außerhalb.

Existiert dagegen eine solche Untermatrix, so ergibt sich mit $i_1<i_2<\ldots<i_k$:

17.2.4. $(-1)^{(\sum_{p\in\underline{k}} j_p - \frac{k(k+1)}{2})} \operatorname{sgn}\sigma_\alpha \, \bar{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar{e}_{i_k}\wedge e_{l_1}\wedge\ldots\wedge e_{l_{n-k}} =$

$= \tilde{B}_\Lambda\Big(\prod_{i,j\in\underline{n}} (e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}\Big)$.

Dabei ist wieder $l_1<\ldots<l_{n-k}$ und $\underline{n}=\{l_1,\ldots,l_{n-k},j_1,\ldots,j_k\}$. σ_α ist die zur Permutationsmatrix $(\alpha_{i_p j_q})_{p,q\in\underline{k}}$ gehörige Permutation aus Σ_k .

Da für alle $i\in\mathbb{N}$ $\tilde{B}_\Lambda(\Gamma_{n+i}(R^n\otimes(R^n)^*)) = 0$ ist, gehört zu $\tilde{B}_\Lambda$ ein Polynomgesetz vom Modul $R^n\otimes(R^n)^*$ nach $\Lambda_n(R^n\oplus R^n)$ und insbesondere eine Polynomabbildung
$F: R^n\otimes(R^n)^* \longrightarrow \Lambda_n(R^n\oplus R^n)$. Für diese gilt:

$$\sum_{i,j\in\underline{n}} a_{ij}\, e_i\otimes f_j \longrightarrow \sum_{k\in\underline{n}_o} \tilde{B}_\Lambda\Big(\Big(\sum_{i,j} a_{ij}\, e_i\otimes f_j\Big)^{[k]}\Big) =$$

$$= \sum_{k\in\underline{n}_o} \sum_{\{(\alpha_{ij})_{i,j\in\underline{n}} \mid \sum_{i,j}\alpha_{ij}=k\}} \prod_{i,j} a_{ij}^{\alpha_{ij}}\, \tilde{B}_\Lambda\Big(\prod_{i,j}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}\Big)$$

Ist $i_1<\ldots<i_k$ und $l_1<\ldots<l_{n-k}$, so ist $\bar{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar{e}_{i_k}\wedge e_{l_1}\wedge\ldots\wedge e_{l_{n-k}}$ ein Element der Standardbasis von $\Lambda_n(R^n\oplus R^n)$ und der Koeffizient dieses Elements im Bild von $\sum_{i,j} a_{ij}\, e_i\otimes f_j$ ist

$$(-1)^{(\sum_{p\in\underline{k}} j_p - \frac{k(k+1)}{2})} \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{i_1 j_{\sigma(1)}}\ldots a_{i_k j_{\sigma(k)}}$$

mit $j_1<\ldots<j_k$ und $\underline{n}=\{j_1,\ldots,j_k,l_1,\ldots l_{n-k}\}$. (*)

Betrachtet man andererseits die $2n\times n$-Matrix $(b_{ij})_{i\in\underline{2n},\, j\in\underline{n}}$ mit $b_{ij}:=a_{ij}$, falls $i\in\underline{n}$ ist, und $b_{ij}:=\delta_{(i-n)\,j}$, falls i aus $\underline{2n}-\underline{n}$ ist, so kann man den $n\times n$-Minor zu den Zeilen $i_1,\ldots,i_k$, $n+l_1,\ldots,n+l_k$ bilden und findet:

$$X := (-1)^{(l_{n-k}+n)+(l_{n-k-1}+n-1)+\ldots+(l_1+k+1)} \left| a_{i_p j_q} \right|_{p,q \in \underline{k}} .$$

$$(l_{n-k}+n)+\ldots+(l_1+k+1) = \sum_{p \in \underline{n-k}} l_p + (k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-k) =$$

$$= \sum_{p \in \underline{n-k}} l_p + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + (n-k)k = \sum_{p \in \underline{n-k}} l_p + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\underset{(*)}{=} 2\,\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{p \in \underline{k}} j_p - \frac{k(k+1)}{2} . \qquad \Longrightarrow$$

$$X = (-1)^{\left(\sum_{p \in \underline{k}} j_p + \frac{k(k+1)}{2}\right)} \left| a_{i_p j_q} \right|_{p,q \in \underline{k}} =$$

$$= (-1)^{\left(\sum_{p \in \underline{k}} j_p - \frac{k(k+1)}{2}\right)} \left| a_{i_p j_q} \right|_{p,q \in \underline{k}} .$$

Nun ist aber X gerade der Koeffizient bei

$\bar{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{e}_{i_k} \wedge e_{l_1} \wedge \ldots \wedge e_{l_{n-k}}$ in der Basisdarstellung von

$$Z := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Lambda_n(R^{2n}) \cong \Lambda_n(R^n \oplus R^n)$$

Das Bild von $\sum_{i,j} a_{ij}\, e_i \otimes f_j$ unter F ist also Z.

17.2.5.BEM.: Identifiziert man $\mathrm{End}(R^n)$ mit $R^n \otimes (R^n)^*$, so ist F genau die in [Pro 78] §2 benutzte Abbildung, mit deren Hilfe dort gezeigt wird, daß die Standard-Doppel-Tableaus eine Basis von $S(\mathrm{End}(R^n))$ bilden. (Vgl. auch [DeC/Eis/Pro 80] 2.)

KAPITEL 18 : Die Determinante für freie Moduln als Algebra-Homomorphismus $\phi_D:\hat{\Gamma}(End(R^n)) \longrightarrow R$.

18.1.Einleitung:

In [Berg 68]2. wird festgestellt, daß die Determinante auf dem Endomorphismenring $End(R^n)$ eine multiplikative Form $\phi_n:\Gamma_n(End(R^n)) \longrightarrow R$ ist, also ein R-Algebra-Hom. In [Schm 71]Satz 4.1. wird das gleiche für endlich-erzeugt projektive Moduln von festem Rang bewiesen. In [Ive 70]wurde für freie Moduln obige Aussage wiederentdeckt und ϕ_n als "lineare Determinante" bezeichnet.

Sowohl in[Berg 68]als auch in[Ive 70]wurde die Faktorisierung über die äußere Algebra bemerkt und damit die Verbindung zur "Bourbakischen" Determinante.([Bou 74]III§8)

Hier soll nun zunächst der kan. R-Algebra-Hom. $\beta_\Lambda:\Gamma(End(R^n)) \longrightarrow \bigoplus_j End(\Lambda_j(R^n))$ aus Kap. 17 durch Komposition mit der Spur auf den Endomorphismenringen zu einem R-Modul-Hom. $\phi:\Gamma(End(R^n)) \longrightarrow R$ "verlängert" werden.

Für die homogenen Komponenten $\phi_k:=\phi|_{\Gamma_k(End(R^n))}$ gilt nicht nur, daß ϕ_n mit obigem ϕ_n übereinstimmt, das zugehörige Polynomgesetz also die "klassische Determinante" "det" ist, sondern es ist allgemein das zu ϕ_k gehörige Polynomgesetz bis auf das Vorzeichen die Abbildung $a \longmapsto$ k-ten Koeffizienetn des charakteristischen Polynoms von $a \in End(R^n)$.

Weiter zeigt sich, daß ϕ vollständig bestimmt ist durch ϕ_n. Es gilt nämlich: $\phi_k=\phi_n\circ\pi_n\circ Sh|_{\Gamma_k(End(R^n))}$. Die ϕ_k entstehen also durch "shiften" mit Sh. Das es trotzdem durchaus sinnvoll ist, nicht nur den R-Algebra-Hom. $\phi_n:\Gamma_n(End(R^n)) \longrightarrow R$,

die "homogene Determinante", allein zu betrachten, sondern $\phi_D := \phi_n \circ \pi_n : \hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^n)) \longrightarrow R$, zeigt sich insbesondere im Anhang III. Dort wird bewiesen, daß die "Goldman-Determinante" für beliebige endlich-erzeugt projektive Moduln ebenfalls über einen R-Algebra-Hom. $\phi_D^M : \hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$ charakterisiert werden kann.
Das zu ϕ_D gehörige Polynomgesetz stellt sich als
$f \longmapsto \det(f+\mathrm{id}_{(R^n)})$ heraus.

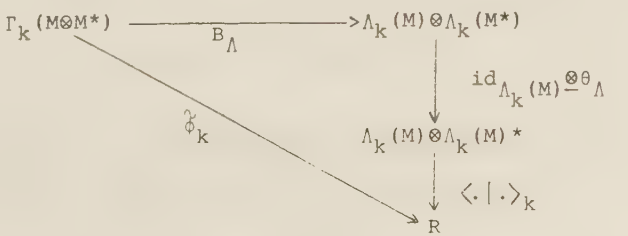
18.2. Statt mit β_Λ wie in der Einleitung angekündigt soll zunächst mit $B_\Lambda : \Gamma(M \otimes M^*) \longrightarrow \bigoplus_j (\Lambda_j(M) \otimes \Lambda_j(M^*))$ gearbeitet werden, da dann M ein beliebiger R-Modul sein kann. Der Übergang zu β_Λ erfolgt, wenn M spezialisiert wird zu einem endlich-erzeugt projektiven und schließlich endlich-dimensional freien Modul.

Für einen beliebigen R-Modul M sei $\langle . \mid . \rangle_i : \Lambda_i(M) \otimes \Lambda_i(M)^* \longrightarrow R$ die Auswertung (Paarung). Kombiniert man diese mit (D_5) aus 17.1., so erhält man einen R-Modulhomomorphismus

$\underline{\underline{\phi}} : \Gamma(M \otimes M^*) \longrightarrow R$ mit $\phi := (\langle . \mid . \rangle_i \circ (\mathrm{id}_{\Lambda_i(M)} \underline{\otimes} \theta_\Lambda))_i \circ B_\Lambda$.

Die homogenen Komponenten $\underline{\underline{\phi_k}} : \Gamma_k(M \otimes M^*) \longrightarrow R$ von ϕ sollen nun näher betrachtet werden.
Nach Definition kommutiert das folgende Diagramm:

(D_1)



Ist M speziell frei mit Basis $\{e_i\}_{i\in\underline{n}}$ und dazu dualer Basis $\{f_j\}_{j\in\underline{n}}$, so ergibt sich aus 17.1.16. sofort:

18.2.1. Für $x:=\prod_{i,j\in\underline{n}}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}\in\Gamma_n(M\otimes M^*)$ ist

$\vartheta_n(x)=\operatorname{sgn}\sigma_\alpha\langle e_1\wedge\ldots\wedge e_n|f_1\cdot\ldots\cdot f_n\rangle=\operatorname{sgn}\sigma_\alpha 1_R$, falls $(\alpha_{ij})_{i,j}$ Permutationsmatrix ist. Andernfalls ist $\vartheta_n(x)=0$.

18.2.2. Für $x:=\prod_{i,j\in\underline{n}}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}\in\Gamma_k(M\otimes M^*)$ ist

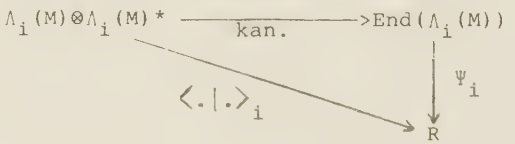
$\vartheta_k(x)=0$, falls nicht eine Permutationsuntermatrix $(\alpha_{i_pj_q})_{p,q\in\underline{k}}$ von $(\alpha_{ij})_{ij\in\underline{n}}$ existiert mit 0 außerhalb.
Existiert eine solche, so ergibt sich

$\vartheta_k(x)=\theta_\Lambda(f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_k})(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})=$

$=\sum_{\rho\in\Sigma_k}\operatorname{sgn}\rho\, f_{j_{\rho^{-1}(1)}}(e_{i_1})\ldots f_{j_{\rho^{-1}(k)}}(e_{i_k})$. Dies ist gleich $\operatorname{sgn}\sigma$, falls $(j_1,\ldots,j_k)=(i_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,i_{\sigma^{-1}(k)})$ ist, und 0, falls ein solches $\sigma\in\Sigma_k$ nicht existiert.

Für endlich-erzeugt projektive Moduln M ist der kan. Hom. kan.: $\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(M)^*\longrightarrow\operatorname{End}(\Lambda_i(M))$ mit $x\otimes F\longmapsto(y\longmapsto F(y)x)$ sogar ein Isomorphismus ([Bou 74] II§4.2.). In diesem Fall lassen sich Homomorphismen $\Psi_i:\operatorname{End}(\Lambda_i(M))\longrightarrow R$ definieren, so daß das folgende Diagramm ($\forall i\in\mathbb{N}_0$) kommutativ ist.

(D_2)



Ist M wieder frei mit $\{e_i\}_{i\in\underline{n}}$ und $\{f_j\}_{j\in\underline{n}}$ wie oben, so ist auch $\Lambda_i(M)$ für jedes i endlich-dimensional frei und

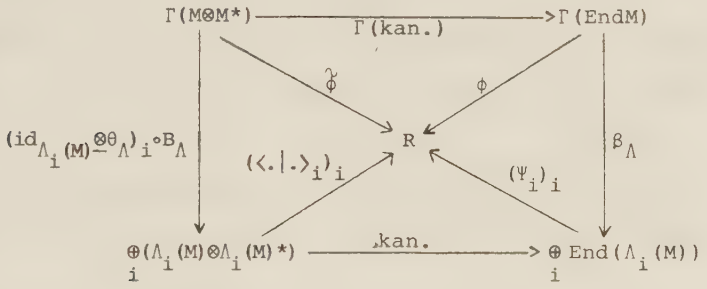
18.2.3. $\Psi_i(\Lambda_i(f)) = Tr(\Lambda_i(f)) \quad \forall f\in EndM$.

Weiter erhält man für $M\cong R^n$ einen R-Modul-Hom.

ϕ: $\Gamma(EndM) \longrightarrow R$, der das folgende Diagramm kommutativ macht.

(Vgl. 17.1.(D_5).)

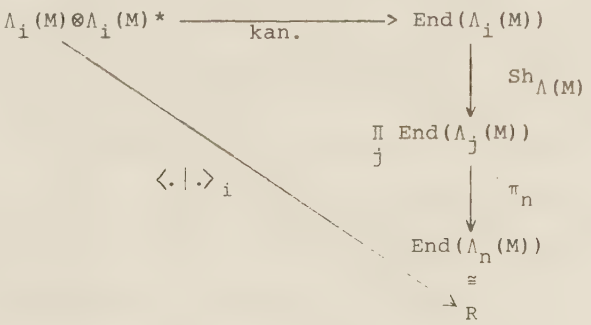
(D_3)



Da $M\cong R^n$ ist, ist $End(\Lambda_n(M))\cong R$ als R-Algebra.

18.2.4.LEMMA: Ist $M\cong R^n$, so kommutiert (D_4) für alle $i\in\mathbb{N}_o$.

(D_4)



BEW.: Für $i>n$ ist $\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(M)^* \cong 0$, woraus die Beh. folgt.

Für $i\leq n$ soll das Basiselement $x := e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_i}\otimes f_{q_1}\cdot\ldots\cdot f_{q_i}$ von

$\Lambda_i(M)\otimes\Lambda_i(M)^*$ betrachtet werden. $(p_1<\ldots<p_i,\ q_1<\ldots<q_i)$

Ist $y := e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_i}\wedge e_{p_{i+1}}\wedge\ldots\wedge e_{p_n} = e_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge e_{\sigma(n)}$ mit $\sigma\in\Sigma_n$ geeignet ein Basiselement des eindimensionalen $\Lambda_n(M)$, so gilt: $\pi_n\circ Sh_{\Lambda(M)}\circ kan(x)(y) = kan(x)\cdot id_{\Lambda_{n-i}(M)}(y) =$

$$= \sum_{\rho\in K(i,n-i)} sgn\rho\ f_{q_1}\cdot\ldots\cdot f_{q_i}(e_{p_{\rho(1)}}\wedge\ldots\wedge e_{p_{\rho(i)}})$$

$$e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_i}\wedge e_{p_{\rho(i+1)}}\wedge\ldots\wedge e_{p_{\rho(n)}} =$$

$$= \sum_{\rho\in K(i,n-i)} f_{q_1}\cdot f_{q_2}\cdot\ldots\cdot f_{q_i}(e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_i})\ e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_n} =$$

$= \langle e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_i} | f_{q_1}\cdot\ldots\cdot f_{q_i}\rangle\ e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_n}$. Die Beh. folgt.■

18.2.5.KOR.: $\forall i\in\mathbb{N}_0$: $\Psi_i = \chi\circ\pi_n\circ Sh_{\Lambda(M)}\big|_{End(\Lambda_i(M))}$;

dabei ist $\chi: End(\Lambda_n(M)) \longrightarrow R$ R-Algebra-Isomorphismus. ■

Sind die ϕ_k: $\Gamma_k(EndM) \longrightarrow R$ die homogenen Komponenten von ϕ, so gilt also:

18.2.6. $\phi_k = \Psi_k\circ\beta_\Lambda\big|_{\Gamma_k(EndM)} \underset{18.2.5.}{=} \chi\circ\pi_n\circ Sh_{\Lambda(M)}\circ\beta_\Lambda\big|_{\Gamma_k(EndM)}$

Für k=1, $f\in EndM$ ist $Sh_{\Lambda(M)}\circ\beta_\Lambda(f^{[1]}) = \Lambda_1(f)\cdot id_{\Lambda(M)}$ eine Derivation auf $\Lambda(M)$. Die Definition $\phi_k(f^{[1]}) =: Tr(f)$ entspricht also der Def.2 V5 in [Sah 67].

Da $\pi_n\circ Sh_{\Lambda(M)}\big|_{End(\Lambda_n(M))} = id_{End(\Lambda_n(M))}$ ist, ist

18.2.7. $\phi_n = \chi\circ\beta_\Lambda\big|_{\Gamma_n(EndM)}$. Insbesondere gilt:

18.2.8. $\phi_n : \Gamma_n(EndM) \longrightarrow R$ ist ein R-Algebra-Hom.

Nach 18.2.1. erhält man für die Werte von ϕ_n auf der Standardbasis:

18.2.9. $$\phi_n\Big(\prod_{i,j\in\underline{n}} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]}\Big) = \begin{cases} 0 & (\alpha_{ij})_{i,j} \text{ ist nicht} \\ \operatorname{sgn}\sigma_\alpha & (\alpha_{ij})_{i,j} \text{ ist} \end{cases}$$

Permutationsmatrix zur Permutation $\sigma_\alpha \in \Sigma_n$.

18.2.10.BEM.: a) 18.2.9. stimmt gerade mit der Definition der "linearen Determinante" in [Ive 70] überein.

b) Andererseits stimmt ϕ_n als R-Algebra-Hom. nach [Schm 71] Satz 5.3. mit der, die Determinante definierenden, multiplikativen Form von [Schm 71] und [Berg 68] überein.

Nach 8.4.4. kommutiert für jedes $k\in\mathbb{N}_o$ das Diagramm (G:=Λ):

(D_5)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(\mathrm{End}M) & \xrightarrow{\mathrm{Sh}} & \prod_j \Gamma_j(\mathrm{End}M) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle (\beta_{\Lambda j})_j} \\ \mathrm{End}(\Lambda_k(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Sh}_{\Lambda(M)}} & \prod_j \mathrm{End}(\Lambda_j(M)) \end{array}$$

18.2.11.SATZ: Folgendes Diagramm kommutiert mit $M\cong R^n$ für alle $k\in\mathbb{N}_o$:

(D_6)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(\mathrm{End}M) & \xrightarrow{\mathrm{Sh}} & \hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \\ & \searrow^{\phi_k} & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ & & \Gamma_n(\mathrm{End}M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_n} \\ & & R \end{array}$$

BEW.: $\phi_k \underset{18.2.6.}{=} \chi\circ\pi_n\circ\mathrm{Sh}_{\Lambda(M)}\circ\beta_\Lambda\big|\Gamma_k(\mathrm{End}M) \underset{(D_5)}{=}$

$= \chi \circ \pi_n \circ (\beta_{\Lambda j})_j \circ Sh|_{\Gamma_k(EndM)} = \chi \circ \beta_{\Lambda n} \circ \pi_n \circ Sh|_{\Gamma_k(EndM)} \overset{18.2.7.}{=}$

$= \phi_n \circ \pi_n \circ Sh|_{\Gamma_k(EndM)}$. ■

18.2.12.KOR.: Für $M \cong R^n$ und $f \in EndM$ gilt:

a) $\forall x_k \in \Gamma_k(EndM) : \phi_k(x_k) = \phi_n(x_k \cdot id_M^{[n-k]})$

b) $\phi_n(f^{[k]} id_M^{[n-k]}) = Tr(\Lambda_k(f))$.

BEW.: Nur b): $\phi_n(f^{[k]} id_M^{[n-k]}) \overset{a)}{=} \phi_k(f^{[k]}) = \Psi_k \circ \beta_\Lambda(f^{[k]}) =$

$= \Psi_k(\Lambda_k(f)) \overset{18.2.3.}{=} Tr(\Lambda_k(f))$. ■

Die $Tr(\Lambda_k(f))$ sind gerade die Koeffizienten (bis auf das Vorzeichen) des charakteristischen Polynoms von f in [Bou 74] III§8.11..

Nach 18.2.10.b) und 5.2.18. stimmen die $\phi_n(f^{[k]} id_M^{[n-k]})$ mit den $\binom{n}{k}(\underbrace{f,\ldots,f}_{k},\underbrace{id,\ldots,id}_{n-k})$ überein, die in der Notation von [Berg 65] dort die Koeffizienten des charakteristischen oder "Haupt"-Polynoms bilden (vgl. [Berg 68]).

Insbesondere ist also $\phi_1(f^{[1]}) = \phi_n(f^{[1]} id_M^{[n-1]}) = Tr(f)$ und $\phi_n(f^{[n]}) = det(f)$. ϕ_n ist demnach die zur Determinante als Polynomgesetz gehörige Linearform. Welches Polynomgesetz gehört zu ϕ? Für $f \in EndM$ ergibt sich:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_o} \phi(f^{[k]}) = \sum_{k \in \underline{n}_o} \phi_k(f^{[k]}) = \sum_{k \in \underline{n}_o} \phi_n(f^{[k]} id_M^{[n-k]}) =$$

$= \phi_n((f+id_M)^{[n]})$. ϕ gehört also zum Polynomgesetz $f \longmapsto det(f+id_M)$.

Zur Hintereinanderausführung der beiden Polynomgesetze $f \longmapsto f+id_M$ und det gehört nach 15.2.7. die Linearform

$\phi_n \circ \pi_n \circ Sh$, da ϕ_n zu det gehört und Sh nach 15.1.22. $\overline{\zeta}_{EndM}$ ist, wenn ζ_{EndM} zum Polynomgestz $f \longmapsto f+id_M$ gehört. Auch nach 18.2.11. stecken alle Informationen über ϕ und $\overset{\vee}{\phi}$ bereits in $\phi_n \circ \pi_n$.

18.2.13.DEF.: ϕ_D: $\hat{\Gamma}(EndM) \longrightarrow R$ $(M \cong R^n!)$ sei der durch $\phi_D := \phi_n \circ \pi_n$ definierte R-Algebra-Hom.

Mit ϕ_{Dn}: $(\Gamma_n(EndM), \tau) \longrightarrow R$ sei im Folgenden ϕ_n bezeichnet.

ϕ_D soll "Determinante" und ϕ_{Dn} "homogene Determinante" genannt werden. Im Gegensatz dazu wird "det" als "klassische Determinante" bezeichnet.

18.2.14.BEM.: Die Fortsetzung des R-Algebra-Hom. ϕ_{Dn} zu einem R-Algebra-Hom. auf ganz $\hat{\Gamma}(EndM)$ ermöglicht eine direkte Verallgemeinerung dieses Determinantenbegriffs auf endlich-erzeugt projektive Moduln (siehe Anhang II). In [Schm 71] mußten zum Zwecke einer Verallgemeinerung von ϕ_{Dn} die "Quasiformen" als Äquivalenzklassen von Systemen homogener Formen eingeführt werden.

18.2.14. a) $\phi = \sum_k \phi_k \underset{18.2.11.}{=} \sum_k \phi_n \circ \pi_n \circ Sh \big|_{\Gamma_k(EndM)} = \phi_D \circ Sh.$

b) $\phi_D(\mathfrak{F}_{n+1}) = 0$, wenn $M \cong R^n$ ist.

Weiter hat man für $f,g \in EndM$: $\phi_D((f \circ g)^{<1>}) = \phi_n((f \circ g)^{<1>} id_M^{<n-1>}) =$
$= Tr(f \circ g)$ nach 18.2.12..
Da die Spur auf dem Endomorphismenring eines endlich-dimensional freien R-Moduls nicht ausgeartet ist (vgl. etwa [Bou 74] II§10.11. Prop.7) gilt für alle f aus EndM :

18.2.15. $(\forall g \in \mathrm{EndM} : \phi_D((f\circ g)^{<1>})=0) \Longrightarrow f = 0$.

Damit erfüllt nun ϕ_D alle Vorraussetzungen des Satzes 16.2.4., und es gilt daher:

18.2.16. $\sum_{i\in \underline{n}_o} (-1)^{n-i}\ \phi_D(f^{<i>})\ f^{n-i} = 0 \qquad \forall f\in \mathrm{EndM}$

oder $\sum_{i\ \underline{n}_o} (-1)^{n-i}\ \mathrm{Tr}(\Lambda_i(f))\ f^{n-i} = 0 \qquad \forall f\in \mathrm{EndM}$.

(Vgl. [Berg 65]Satz 4 und [Bou 74]III§8.11. Prop.20)

Eine im Grunde bekannte Aussage ist:

18.2.17.LEMMA: Für jedes $g\in \mathrm{EndM}$ $(M\cong R^n)$ der Form $g=\sum_{i\in \underline{n}} \alpha_i e_{ii}$ (Diagonalmatrix) kommutiert folgendes Diagramm in R-ALG:

(D_7)

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(R[X]^+) & \longrightarrow & \Gamma_n(R[X]) \cong R[X_1,\ldots,X_n]^{\Sigma_n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \hat{\Gamma}(X\mapsto g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \begin{matrix} X_i \\ \downarrow \\ \alpha_i \end{matrix}} \\ \hat{\Gamma}(\mathrm{EndM}) & \xrightarrow{\ \phi_D\ } & R \end{array}$$

BEW.: $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ wird als Algebra erzeugt von den Elementen $X^{<j>}$. $\phi_D\circ\hat{\Gamma}(X\to g)(X^{<j>}) = \phi_D(g^{<j>}) =$

$$= \sum_{j_1+\ldots+j_n=j} \alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_n^{j_n}\ \phi_D(e_{11}^{<j_1>}\ldots e_{nn}^{<j_n>}) =$$

$$= \sum_{j_1+\ldots+j_n=j} \alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_n^{j_n}\ \phi_{Dn}(e_{11}^{[j_1]}\ldots e_{nn}^{[j_n]}(\sum_{k\in \underline{n}} e_{kk})^{[n-j]}) =$$

$$= \sum_{j_1+\ldots+j_n=j}\ \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n \\ =n-j}} \alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_n^{j_n}\ [j_1,k_1]\ldots[j_n,k_n]\phi_n(\sum_{i\in \underline{n}} e_{ii}^{[j_i+k_i]}) =$$

$\overset{=}{18.2.9}$ $\sum_{i_1<\ldots<i_j} \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_j}$ = j-te elementarsymmetrische Funktion in $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Andererseits wurde in 16.1.6. bereits gezeigt, daß das Bild von $X^{<j>}$ unter π_n in $R[X_1,\ldots,X_n]$ gerade die j-te elementarsymmetrische Funktion in den X_i ist. Es folgt die Beh.. ■

KAPITEL 19 : Spezielle Zusammenhänge zwischen T_k und Λ_k .

Ähnlich wie bei Γ und S spiegeln viele Aussagen über Λ nur Eigenschaften des Tensor-Funktors wieder. Insbesondere wird in diesem Kapitel gezeigt, daß die im vorigen Kapitel 18.2. eingeführten $\tilde{\phi}_k$: $\Gamma_k(M\otimes M^*) \longrightarrow R$ ("fast" die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung!) eine enge Verwandtschaft zu den Antisymmetrieoperatoren auf den $\mathrm{End}(T_k(M))$ haben.

19.1. Durch $x_1\otimes\ldots\otimes x_k \longmapsto \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \mathrm{sgn}\sigma\ x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(k)} \quad \forall x_i\in M$ wird ein R-Modul-Hom. von $T_k(M)$ nach $T_k(M)$ definiert, der, da alternierend, über $\Lambda_k(M)$ faktorisiert und einen kanonischen R-Modul-Hom.($M\in$R-MOD bel.)

$\iota_{\Lambda k}$: $\Lambda_k(M) \longrightarrow T_k(M)$ liefert.

$$x_1\wedge\ldots\wedge x_k \longmapsto \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \mathrm{sgn}\sigma\ x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(k)} \quad .$$

Wenn k klar ist soll auch ι_Λ statt $\iota_{\Lambda k}$ geschrieben werden. Bezeichnet kan_Λ:$T_k(M) \longrightarrow \Lambda_k(M)$ für jedes k den kanonischen Epimorphismus, so erhält man das folgende kommutative Diagramm:

(D_1)

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_k(M^*) & \xrightarrow{\theta_\Lambda} & \Lambda_k(M)^* \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_\Lambda} & \textcircled{1} & \downarrow{\scriptstyle (kan_\Lambda)^*} \\
T_k(M^*) & \xrightarrow{\theta_T} & T_k(M)^* \\
\downarrow{\scriptstyle kan_\Lambda} & \textcircled{2} & \downarrow{\scriptstyle (\iota_\Lambda)^*} \\
\Lambda_k(M^*) & \xrightarrow{\theta_\Lambda} & \Lambda_k(M)^*
\end{array}$$

Dabei ist θ_T der früher mit β'_T bezeichnete Hom.(vgl.7.2.(D_7) und Anfang von 6.2.) und θ_Λ wie in 17.1.13. .

BEW.: ② : $(\iota_\Lambda)^* \circ \theta_T(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k)(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) =$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn} \; f_1(m_{\sigma(1)}) \ldots f_k(m_{\sigma(k)})$$

$$\theta_\Lambda \circ kan_\Lambda(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k)(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma \; f_{\sigma(1)}(m_1) \ldots f_{\sigma(k)}(m_k) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \; f_1(m_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots f_k(m_{\sigma^{-1}(k)}) \text{ . Der Rest ist klar.}$$

① ist noch einfacher. ■

19.1.1.LEMMA: Ist M Links-A-Algebra-Modul, dann ist

$\iota_\Lambda : \Lambda_k(M) \longrightarrow T_k(M)$ ein Links-$\Gamma_k(A)$-Algebra-Modul-Hom..

BEW.: Es reicht die Aussage für A=EndM zu beweisen.

Für $\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(\operatorname{End}M)$ und $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k \in \Lambda_k(M)$ gilt:

$$(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) = (kan_\Lambda)^* \circ \beta_\Lambda(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) =$$

$$= \underset{17.1.4.(D_3)}{(kan_\Lambda)_* \circ \beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)} \xrightarrow{\iota_\Lambda}$$

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma \; \overline{\sigma^{-1}}(\beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k)) \underset{6.2.8.}{=}$$

$$= \beta_T(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})(\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma^{-1}}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) = \prod_i f_i^{[\alpha_i]} \cdot (m_1 \ldots m_k)$$ ■

19.1.2.SATZ: Folgendes Diagramm kommutiert für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und $M\in R\text{-MOD}$:

(D_2)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_k(M\otimes M^*) & \xrightarrow{\quad B_\Lambda \quad} & \Lambda_k(M)\otimes\Lambda_k(M^*) \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_\Lambda\otimes\iota_\Lambda} \\
T_k(M\otimes M^*) & & T_k(M)\otimes T_k(M^*) \\
\downarrow{\scriptstyle T_k(\text{kan.})} & & \downarrow{\scriptstyle id_{T_k(M)}\otimes\theta_T} \\
T_k(\text{End}M) & & T_k(M)\otimes T_k(M)^* \\
\downarrow{\scriptstyle \beta'_T} & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan.}} \\
\text{End}(T_k(M)) & \xrightarrow{\quad (\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*\quad} & \text{End}(T_k(M))
\end{array}$$

19.1.3.BEM.: $(\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*$ ist die Linksmultiplikation mit dem Antisymmetrieoperator. Das Bild von $\Gamma_k(M\otimes M^*)$ in $\text{End}(T_k(M))$ unter der Komposition der Abbildungen in der linken Spalte von (D_2) liegt jedoch, da ι_Γ nat. Transf. ist, nach 6.2.8. in $\text{End}_{R\Sigma_k}(T_k(M))$, so daß für f aus diesem Bild

$$(\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*(f) = (\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})^*(f) \quad \text{ist.}$$

BEW. von 19.1.2.: Für $\prod_{i\in I}(m_i\otimes f_i)^{[\alpha_i]} \in \Gamma_k(M\otimes M^*)$ ist

$B_\Lambda(\prod_{i\in I}(m_i\otimes f_i)^{[\alpha_i]}) = 0$, falls für ein $i\in I$ $\alpha_i>1$ ist. Mit

$x_1\otimes\ldots\otimes x_k\in T_k(M)$ erhält mann dann:

$$(\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*\circ\beta'_T\circ T_k(\text{kan.})\circ\iota_\Gamma(\prod_i(m_i\otimes f_i)^{[\alpha_i]})(x_1\otimes\ldots\otimes x_k) \overset{\text{BEM.}}{=}$$

$$= \sum_{\nu\in K((\alpha_i)_i)} \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\nu}(\underline{\bigotimes_i} \operatorname{kan}(m_i\otimes f_i)^{\underline{\otimes}\alpha_i})(\overline{\sigma}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)$$

Beh.: $\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\nu}(\underline{\bigotimes_i} \operatorname{kan}(m_i\otimes f_i)^{\underline{\otimes}\alpha_i})(\overline{\sigma}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)) = 0$, falls

$\alpha_j > 1$ ist für ein $j\in I$.

Dann stünde nämlich in $\overline{\nu}(\underline{\bigotimes_i} F_i^{\underline{\otimes}\alpha_i})$ $(F_i := m_i\otimes f_i)$ an mindestens zwei Stellen, etwa p und q $(\in\underline{k})$, das Element F_i.

Zu jedem $\sigma\in\Sigma_k$ existiert dann $\sigma' := (p,q)\circ\sigma\in\Sigma_k$ mit

1) $\operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma$ und

2) $\overline{\nu}(\underline{\bigotimes_i} F_i^{\underline{\otimes}\alpha_i})(\overline{\sigma}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)) = \overline{\nu}(\underline{\bigotimes_i} F_i^{\underline{\otimes}\alpha_i})(\overline{\sigma'}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k))$.

Die Zwischenbehauptung ist also korrekt.

Es reicht demnach , die Kommutativität von (D_2) für Elemente $(m_1\otimes f_1)^{[1]}\ldots(m_k\otimes f_k)^{[1]}\in\Gamma_k(M\otimes M^*)$ nachzuweisen.

Linksherum ergibt sich dann:

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \sum_{\nu\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\nu}(\operatorname{kan}(m_1\otimes f_1)\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\operatorname{kan}(m_k\otimes f_k))(\overline{\sigma}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)) =$$

$$= \sum_{\nu\in\Sigma_k} \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\nu}(f_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}f_k)(\overline{\sigma}(x_1\otimes\ldots\otimes x_k))\ \overline{\nu}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) =$$

$$= \sum_{\nu\in\Sigma_k} \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ f_{\nu^{-1}(1)}(x_{\sigma^{-1}(1)})\ldots f_{\nu^{-1}(k)}(x_{\sigma^{-1}(k)})\ \overline{\nu}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) =$$

$$= \sum_{\nu\in\Sigma_k} \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\sigma\ f_{\nu^{-1}\circ\sigma(1)}(x_1)\ldots f_{\nu^{-1}\circ\sigma(k)}(x_k)\ \overline{\nu}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) =$$

$$= \sum_{\nu\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\nu \sum_{\rho\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\rho\ f_{\rho^{-1}(1)}(x_1)\ldots f_{\rho^{-1}(k)}(x_k)\ \overline{\nu}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) =$$

$$= \sum_{\nu\in\Sigma_k} \sum_{\rho\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\nu\ \operatorname{sgn}\rho\ \overline{\rho}(f_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}f_k)(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)\ \overline{\nu}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) .$$

Rechtsherum erhält man:

$$\operatorname{kan}\circ(\mathrm{id}_{T_k(M)}\underline{\otimes}\vartheta_T)\circ(\iota_\Lambda\underline{\otimes}\iota_\Lambda)\circ B_\Lambda((m_1\otimes f_1)^{[1]}\ldots(m_k\otimes f_k)^{[1]})(x_k\otimes\ldots\otimes x_k) =$$

$$= \sum_{\nu,\rho\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\nu \operatorname{sgn}\rho\ \overline{\rho}(f_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}f_k)(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)\ \overline{\nu}(m_1\otimes\ldots\otimes m_k) \quad \blacksquare$$

Da ι_Γ nat. Transformation ist, ist die linke Spalte im Diagramm (D_2) gerade $\beta_T\circ\Gamma_k(\text{kan.}) =: \underline{\underline{\beta}}_{Tk}$, wobei kan.:M⊗M* ⟶ EndM wie üblich definiert ist.

Ist weiter für einen enlich-erzeugt projektiven R-Modul M $\mathrm{Tr}_k:\mathrm{End}(T_k(M)) \longrightarrow R$ die übliche Spur, so läßt sich folgende Aussage formulieren:

<u>19.1.4.SATZ:</u> Für $M\cong R^n$ ist auf $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}_k\circ(\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*\circ\underline{\underline{\beta}}_{Tk}) \leq R$ die "Linksmultiplikation mit $\frac{1}{k!}$" definiert und es gilt:

$$\frac{1}{k!}\ \mathrm{Tr}_k\circ(\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*\circ\underline{\underline{\beta}}_{Tk} = \underline{\underline{\phi}}_k \quad (\text{vgl. } 18.2.(D_1)) .$$

<u>BEW.:</u> Dem Beweis von 19.1.2. entnimmt man, wenn $\{e_i\}_{i\in\underline{n}}$ Basis von M und $\{f_j\}_{j\in\underline{n}}$ die dazu duale Basis von M* ist:

1) $\mathrm{Tr}_k\circ(\sum \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})_*\circ\underline{\underline{\beta}}_{Tk}\ (\prod_{i,j}(e_i\otimes f_j)^{[\alpha_{ij}]}) = 0$, falls für ein $(i,j)\in(\underline{n})^2$ $\alpha_{ij}>1$ ist.

2) $X:= \mathrm{Tr}_k\circ(\sum_\nu \operatorname{sgn}\nu\ \overline{\nu})_*\circ\underline{\underline{\beta}}_{Tk}((e_{i_1}\otimes f_{j_1})^{[1]}\ldots(e_{i_k}\otimes f_{j_k})^{[1]}) =$

$$= \sum_{\nu,\rho\in\Sigma_k} \operatorname{sgn}\nu \operatorname{sgn}\rho\ f_{j_{\rho^{-1}(1)}}(e_{i_{\nu^{-1}(1)}})\ldots f_{j_{\rho^{-1}(k)}}(e_{i_{\nu^{-1}(k)}}) =$$

$= 0$, falls nicht $j_1,\ldots,j_k$ paarweise verschieden sind, und ein $\sigma\in\Sigma_k$ existiert, so daß $(j_1,\ldots,j_k) = (i_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,i_{\sigma^{-1}(k)})$ ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt:

$$f_{j_{\rho^{-1}(1)}}(e_{i_{\nu^{-1}(1)}})\ldots f_{j_{\rho^{-1}(k)}}(e_{i_{\nu^{-1}(k)}}) \neq 0\ (=1) \iff$$

$j_{\rho^{-1}(1)} = i_{\nu^{-1}(1)}, \ldots, j_{\rho^{-1}(k)} = i_{\nu^{-1}(k)} \quad \Longleftrightarrow$

$i_{\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}(1)} = i_{\nu^{-1}(1)}, \ldots, i_{\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}(k)} = i_{\nu^{-1}(k)} \quad \Longleftrightarrow$

$\rho = \nu\circ\sigma^{-1} \Longrightarrow X = \sum_{\sigma\in\Sigma_k} (\mathrm{sgn}\nu)^2 \,\mathrm{sgn}\sigma = k!\,\mathrm{sgn}\sigma$. Die Behauptung folgt mit 18.2.2. . ■

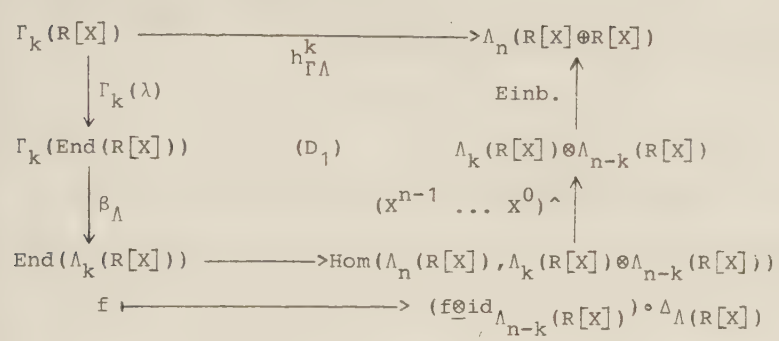
KAPITEL 20 : Die Determinante ϕ_D und der Zusammenhang zwischen symmetrischen ($\Gamma_n(R[X])$) und schiefsymmetrischen ($\Lambda_n(R[X])$) Polynomen.

Schon Lemma 18.2.17. provoziert den Versuch, die Determinante irgendwie als "Spezialisierung" eines auf $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ definierten Homomorphismus zu deuten.
Eine mögliche Deutung wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels behandelt. Es zeigt sich nämlich ein enger Zusammenhang zwischen der homogenen Determinante ϕ_{Dn} und einem Isomorphismus $H^n_{\Gamma\Lambda}:\Gamma_n(R[X]) \longrightarrow \Lambda_n(R[X])$, der nichts anderes ist, als die bekannte Bijektion zwischen symmetrischen und schiefsymmetrischen Polynomen.
Im zweiten Abschnitt wird ein Beweis für diese Isomorphie gegeben, da diese in der angegebenen Gestalt sonst nicht auftritt.

20.1. Zunächst müssen einige Homomorphismen bereitgestellt werden.

20.1.1.DEF.: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ sei $h^k_{\Gamma\Lambda}:\Gamma_k(R[X]) \longrightarrow \Lambda_n(R[X]\otimes R[X])$

definiert als derjenige R-Modul-Hom., der das folgende Diagramm kommutativ macht.



Dabei ist $(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)\hat{}$ die Auswertung an der Stelle $X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0$ und $\lambda: R[X] \longrightarrow End(R[X])$ die Links-$R[X]$-Struktur auf $R[X]$.

$h^k_{\Gamma\Lambda}$ bildet folgendermaßen ab: $\prod_{i\geq 0} X^{i\,[\alpha_i]} \longmapsto \prod_{i\geq 0} \lambda_{X^i}^{\,[\alpha_i]} \longmapsto$

$$\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}(\lambda_{X^i}) \longmapsto \Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}(\lambda_{X^i})\otimes id_{\Lambda_{n-k}(R[X])}\Big)\circ\Delta_\Lambda(R[X]) \longmapsto$$

$$\sum_{\sigma\in K(k,n-k)} sgn\sigma \Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}(\lambda_{X^i})\Big)(X^{n-\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge X^{n-\sigma(k)})\otimes X^{n-\sigma(k+1)}\wedge\ldots\wedge X^{n-\sigma(n)}$$

$\longmapsto$

20.1.2.

$$\sum_{\sigma\in K(k,n-k)} sgn\sigma \Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}((\lambda_{X^i}, id_{R[X]})\Big)\Big(\bigwedge_{j\in \underline{k}} (X^{n-\sigma(j)},0)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{j\in \underline{n-k}} (0,X^{n-\sigma(j)})\Big)$$

Man bemerkt: Ersetzt man in 20.1.2. sowohl $(X^1,0)$ als auch $(0,X^1)$ durch X^1 und (λ_{X^i},id) durch λ_{X^i}, so erhält man statt 20.1.2. gerade $Sh_{\Lambda(R[X])}\Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}(\lambda_{X^i})\Big)(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)$.

1) Dieses "Ersetzen" wird geleistet durch die Addition "+": $R[X]\oplus R[X] \longrightarrow R[X]$ bzw. Λ_n("+") hier.

2) $\Lambda_k(R[X])\otimes\Lambda_{n-k}(R[X]) \xrightarrow[\text{Einb.}]{} \Lambda_n(R[X]\otimes R[X]) \xrightarrow{\Lambda_n("+")} \Lambda_n(R[X])$

ist nichts anderes als die Multiplikation $\mu_{\Lambda(R[X])}$ eingeschränkt auf $\Lambda_k(R[X])\otimes\Lambda_{n-k}(R[X])$.

20.1.3.DEF.: Mit $H^k_{\Gamma\Lambda}:\Gamma_k(R[X]) \longrightarrow \Lambda_n(R[X])$ sei der durch $H^k_{\Gamma\Lambda}:=\Lambda_n("+")\circ h^k_{\Gamma\Lambda}$ definierte R-Modul-Hom. bezeichnet.

Nach den obigen Bemerkungen ist jetzt die Kommutativität des folgenden Diagramms klar.

(D_2)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_k(R[X]) & \xrightarrow{\Gamma_k(\lambda)} & \Gamma_k(\mathrm{End}(R[X])) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle H^k_{\Gamma\Lambda}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} \\
 & & \mathrm{End}(\Lambda_k(R[X])) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_n\circ Sh_{\Lambda(R[X])}} \\
\Lambda_n(R[X]) & \xleftarrow{(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)^\wedge} & \mathrm{End}(\Lambda_n(R[X]))
\end{array}$$

Beachte: $Sh_{\Lambda(R[X])}(f) = (\mu_{\Lambda(R[X])})_*((f\underline{\otimes}id_{\Lambda(R[X])})\circ\Delta_{\Lambda(R[X])})$

Mit 2) wird daher deutlich, daß (D_1) gewissermaßen den "wesentlichen Kern" von (D_2) darstellt.

Für k=n ergibt sich aus (D_2) speziell:

20.1.4. $H^n_{\Gamma\Lambda} = (X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)^\wedge\circ\beta_\Lambda\circ\Gamma_n(\lambda)$.

20.1.5.LEMMA: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ kommutiert folgendes Diagramm:

(D_3)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_k(R[X]) & \xrightarrow{Sh} & \hat{\Gamma}(R[X]) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle H^k_{\Gamma\Lambda}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\
\Lambda_n(R[X]) & \xleftarrow{H^n_{\Gamma\Lambda}} & \Gamma_n(R[X])
\end{array}$$

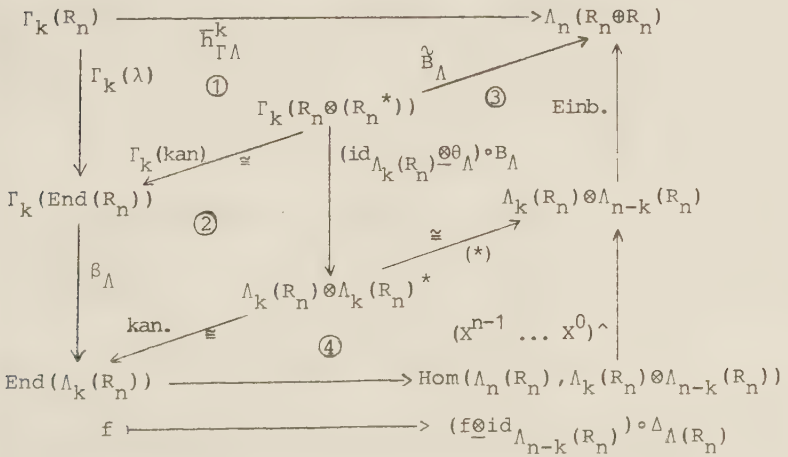
BEW.: $H^n_{\Gamma\Lambda} \circ \pi_n \circ Sh \big|_{\Gamma_k(R[X])} \underset{20.1.4.}{=} (X^{n-1} \wedge \ldots \wedge X^0)^\wedge \circ \beta_\Lambda \circ \Gamma_n(\lambda) \circ \pi_n \circ Sh \big| =$

$= (X^{n-1} \wedge \ldots \wedge X^0)^\wedge \circ \pi_n \circ (\beta_{\Lambda i} \circ \Gamma_i(\lambda))_i \circ Sh \big|_{\Gamma_k(R[X])} \underset{8.4.8.}{=}$

$= (X^{n-1} \wedge \ldots \wedge X^0)^\wedge \circ \pi_n \circ Sh_{\Lambda(R[X])} \circ \beta_\Lambda \circ \Gamma_k(\lambda) \underset{(D_2)}{=} H^k_{\Gamma\Lambda}$. ■

Für ein beliebiges aber festes normiertes Polynom P vom Grad n in $R[X]$ sei I_n das von P in $R[X]$ aufgespannte Ideal und R_n die Faktoralgebra $R[X]/I_n$. R_n ist als R-Modul isomorph zu R^n mit Basis $\{X^{n-1}, X^{n-2}, \ldots, X^0\}$ (Das Bild von X unter dem kan. Epi. $R[X] \longrightarrow R_n$ sei wieder mit X bezeichnet!). Für R_n statt $R[X]$ läßt sich ein zu (D_1) völlig analoges Diagramm aufstellen, wenn man definiert:

20.1.6.DEF.: Mit $\overline{\overline{h}}^k_{\Gamma\Lambda}: \Gamma_k(R_n) \longrightarrow \Lambda_n(R_n \oplus R_n)$ sei der R-Modulhomomorphismus bezeichnet, der im folgenden Diagramm das äußere Rechteck kommutativ macht.



Die mit (*) gekennzeichnete Abbildung in (D_1') hat die Form $id_{\Lambda_k(R_n)} \otimes f$ mit $f: \Lambda_k(R_n)^* \xrightarrow{\theta_\Lambda^{-1}} \Lambda_k(R_n^*) \overset{\cong}{\underset{17.2.1.}{}} \Lambda_{n-k}(R_n)$, und ist somit ein Isomorphismus.

Über das Innere von (D_1') läßt sich weiter sagen:

② kommutiert nach 17.1.(D_5).

③ kommutiert nach Def. von $\tilde{B}_\Lambda$ (17.2.3.).

Daß ④ kommutiert sieht man so :

Ist $i_1<\ldots<i_k$, $j_1<\ldots<j_k$ mit i_p, $j_q \in \underline{n-1}_o$, und ist für $l \in \underline{n-1}_o$ $\bar{x}^l \in R_n^*$ definiert durch $\bar{x}^l(x^m) := \delta_{lm}$, so gilt:

$(x^{n-1} \wedge \ldots \wedge x^0)\hat{}\ (f \longmapsto f \otimes id_{\Lambda_{n-k}(R_n)} \circ \Delta_{\Lambda(R_n)})$ bildet das Element

$kan(x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} \otimes \theta_\Lambda(\bar{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{x}^{j_k}))$ ab auf

$$\sum_{\sigma \in K(k,n-k)} sgn\sigma\ \theta_\Lambda(\bar{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{x}^{j_k})(x^{n-\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x^{n-\sigma(k)}) x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} \otimes x^{n-\sigma(k+1)} \wedge \ldots \wedge x^{n-\sigma(n)} =$$

$= x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} \otimes x^{l_1} \wedge \ldots \wedge x^{l_{n-k}}\ sgn\rho$ mit $l_1<\ldots<l_{n-k}$ und $\{l_1,\ldots,l_{n-k},j_1,\ldots,j_k\} = \underline{n-1}_o$. Dabei ist ρ diejenige Permutation aus $K(k,n-k)$ mit $\rho(1)=j_1,\ldots,\rho(k)=j_k$. Also ist $sgn\rho=(-1)^{\nu_j}$ und die Beh. folgt durch Vergleich mit 17.2.1..

Damit kommutiert nun auch ① bzw.

(D_4)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(R_n) & \xrightarrow{\Gamma_k(\lambda)} & \Gamma_k(End(R_n)) \\ \Big\downarrow \bar{h}^k_{\Gamma\Lambda} & & \Big\downarrow \Gamma_k(kan.)^{-1} \\ \Lambda_n(R_n \oplus R_n) & \xleftarrow{\tilde{B}_\Lambda} & \Gamma_k(R_n \otimes R_n^*) \end{array}$$

Der Zusammenhang zwischen $\bar{h}^k_{\Gamma\Lambda}$ und $h^k_{\Gamma\Lambda}$ ist nicht nur rein formal, sondern man findet:

20.1.7.LEMMA: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ kommutiert folgendes Diagramm:

(D_5)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(R[X]) & \xrightarrow{\quad h^k_{\Gamma\Lambda}\quad} & \Lambda_n(R[X]\oplus R[X]) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma_k(f_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_n((f_n,f_n))} \\ \Gamma_k(R_n) & \xrightarrow{\quad \bar{h}^k_{\Gamma\Lambda}\quad} & \Lambda_n(R_n\oplus R_n) \end{array}$$

Dabei ist $f_n: R[X] \longrightarrow R_n$ der kan. Epimorphismus.

BEW.: $h^k_{\Gamma\Lambda}$ bildet $\prod_{i\geq 0} X^{i\,[\alpha_i]} \in \Gamma_k(R[X])$ ab auf

$$\sum_{\sigma\in K(k,n-k)} \operatorname{sgn}\sigma \Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}((\lambda_{X^i}, id)) \Big(\bigwedge_{j\in \underline{k}} (X^{n-\sigma(j)},0)\Big)\Big) \wedge \bigwedge_{j\in \underline{n}-\underline{k}} (0,X^{n-\sigma(j)}).$$

Dies wird durch $\Lambda_n((f_n,f_n))$ weiter abgebildet auf

$$\sum_{\sigma\in K(k,n-k)} \operatorname{sgn}\sigma \Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}((f_n\circ\lambda_{X^i}, f_n)) \Big(\bigwedge_{j\in \underline{k}} (X^{n-\sigma(j)},0)\Big)\Big) \wedge$$

$$\bigwedge_{j\in \underline{n}-\underline{k}} (0,f_n(X^{n-\sigma(j)})).$$

Andererseits : $\bar{h}^k_{\Gamma\Lambda}\Big(\prod_{i\geq 0} f_n(X^i)^{[\alpha_i]}\Big) =$

$$\sum_{\sigma\in K(k,n-k)} \operatorname{sgn}\sigma \Big(\prod_{i\geq 0} \Lambda_{\alpha_i}((\lambda_{f_n(X^i)}, id)) \Big(\bigwedge_{j\in \underline{k}} (f_n(X^{n-\sigma(j)}),0)\Big)\Big) \wedge$$

$$\bigwedge_{j\in \underline{n}-\underline{k}} (0,f_n(X^{n-\sigma(j)})).$$

$\lambda_{f_n(X^i)}(f_n(X^{n-\sigma(j)})) = f_n(X^i) f_n(X^{n-\sigma(j)}) =$
f_nAlg.-Hom.
$= f_n(X^i \cdot X^{n-\sigma(j)}) = f_n\circ\lambda_{X^i}(X^{n-\sigma(j)})$. Es folgt die Behauptung. ■

Auch (D_2) läßt sich analog für R_n aufstellen.

20.1.8.DEF.: $\bar{H}^k_{\Gamma\Lambda}: \Gamma_k(R_n) \longrightarrow \Lambda_n(R_n)$ sei der durch

$\bar{H}^k_{\Gamma\Lambda} := \Lambda_n("+")\circ \bar{h}^k_{\Gamma\Lambda}$ definierte R-Modul-Hom.

In 20.1.8. ist natürlich "+":$R_n \oplus R_n \longrightarrow R_n$ die Addition auf R_n.

(D_2')

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(R_n) & \xrightarrow{\Gamma_k(\lambda)} & \Gamma_k(\mathrm{End}(R_n)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{H}^k_{\Gamma\Lambda}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_\Lambda} \\ \Lambda_n(R_n) & \xleftarrow{(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)\hat{}} & \mathrm{End}(\Lambda_k(R_n)) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_n\ \mathrm{Sh}_\Lambda(R_n)} \\ & & \mathrm{End}(\Lambda_n(R_n)) \end{array}$$

BEW.: klar, analog zu (D_2). ■

Wiederum ist der Zusammenhang von $\overline{H}^k_{\Gamma\Lambda}$ und $H^k_{\Gamma\Lambda}$ nicht nur formal.

20.1.9.LEMMA: Folgendes Diagramm kommutiert für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(R[X]) & \xrightarrow{H^k_{\Gamma\Lambda}} & \Lambda_n(R[X]) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma_k(f_n)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Lambda_n(f_n)} \\ \Gamma_k(R_n) & \xrightarrow{\overline{H}^k_{\Gamma\Lambda}} & \Lambda_n(R_n) \end{array}$$

(f_n wie in 20.1.7.)

BEW.: Wegen 20.1.7. reicht es, $\Lambda_n(f_n)\circ\Lambda_n("+") =$
$= \Lambda_n("+")\circ\Lambda_n((f_n,f_n))$ oder einfach $f_n\circ"+" = "+"\circ(f_n,f_n)$ zu zeigen. Die Linearität von f_n liefert dies.

Definiert man einen R-Modul Isomorphismus $g:\Lambda_n(R_n) \longrightarrow R$ durch $X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0 \longrightarrow 1_R$, so liefert die Hintereinanderausführung $\mathrm{End}(\Lambda_n(R_n)) \xrightarrow{(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)\hat{}} \Lambda_n(R_n) \cong R$ gerade

$r\cdot id \longmapsto r\cdot X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0 \longmapsto r\cdot 1_R$. Dies ist genau der

R-Algebra-Hom χ aus 18.2.5.. Aus 18.2.6. ergibt sich mit (D_2') oben der Zusammenhang zwischen $\overline{H}^k_{\Gamma\Lambda}$ und ϕ_k aus 18.2..

(D_7)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(R_n) & \xrightarrow[\Gamma_k(\lambda)]{} & \Gamma_k(\mathrm{End}(R_n)) \\ \Big\downarrow \overline{H}^k_{\Gamma\Lambda} & & \Big\downarrow \phi_k=\phi_D\circ Sh\big|_{\Gamma_k(\mathrm{End}(R_n))} \\ \Lambda_n(R_n) & \xrightarrow{\cong} & R \end{array}$$

Aus 8.4.5. folgert man: $\Gamma_n(\lambda)\circ\pi_n\circ Sh\big|_{\Gamma_k(R_n)} = \pi_n\circ Sh\circ\Gamma_k(\lambda)$.
Damit folgt aus (D_7) die Kommutativität von (D_8).

(D_8)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(R_n) & \xrightarrow[Sh]{} & \hat{\Gamma}(R_n) \\ \Big\downarrow \overline{H}^k_{\Gamma\Lambda} & & \Big\downarrow \pi_n \\ \Lambda_n(R_n) & \xleftarrow{\overline{H}^n_{\Gamma\Lambda}} & \Gamma_n(R_n) \end{array} .$$

Zusammenfassung: Aus $H^k_{\Gamma\Lambda}$ bekommt man durch "Faktorbildung" $R[X] \longrightarrow R_n$ die Abbildung $\overline{H}^k_{\Gamma\Lambda}$.
$\overline{H}^k_{\Gamma\Lambda}$ stimmt auf der Teilmenge $\Gamma_k(R_n)$ von $\Gamma_k(\mathrm{End}(R_n))$, die von den Linksmultiplikationen $R_n \longrightarrow \mathrm{End}(R_n)$ auf der Algebra R_n herrührt, mit ϕ_k überein.

20.2. $H^n_{\Gamma\Lambda}: \Gamma_n(R[X]) \longrightarrow \Lambda_n(R[X])$ entsteht, indem man ein Element $y\in\Gamma_n(R[X])$ auf das spezielle Element $X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0$ des Links-$\Gamma_n(R[X])$-Algebra-Moduls $\Lambda_n(R[X])$ (17.1.9.) wirken läßt. Für $y := \prod_{i\in\mathbb{N}_0} X^{i^{\lceil\alpha_i\rceil}} \in \Gamma_n(R[X])$ ergibt sich:

$$\prod_{i\in\mathbb{N}_0} X^{i^{\lceil\alpha_i\rceil}}(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K_n((\alpha_i)_i)} \operatorname{sgn}\sigma \bigwedge_{i\geq 0} (X^i\cdot X^{n-\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1)} \ldots X^i\cdot X^{n-\sigma(\alpha_1+\ldots+\alpha_i)}) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K_n((\alpha_i)_i)} \bigwedge_{l\in\underline{n}} X^{n+i(\sigma^{-1}(l))-l} \text{ , wobei } i(l):=j, \text{falls}$$

$\sum_{p<j}\alpha_p < l \leq \sum_{p\leq j}\alpha_p$. Dann ist $i(\sigma^{-1}(l))=j \overset{5.2.8.}{\Longleftrightarrow} l\in U_j^\sigma \overset{5.3.2.}{\Longleftrightarrow}$

wenn $(\alpha_{lj})_{l\in\underline{n}, j\in\mathbb{N}_o}$ die nach 5.3.1. zu U^σ gehörige Matrix aus $M((\underbrace{1,\ldots,1}_{n});(\alpha_i)_i)$ ist. Nach 5.3.1. und 5.3.4. gilt also:

20.2.1. $$H^n_{\Gamma\Lambda}\Big(\prod_{i\in\mathbb{N}_o} X^{i\left[\alpha_i\right]}\Big) = \prod_{i\in\mathbb{N}_o} X^{i\left[\alpha_i\right]}(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0) =$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha_{ij})_{\substack{i\in\underline{n}\\ j\in\mathbb{N}_o}} \in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)}} \bigwedge_{l\in\underline{n}} X^{n-1+\sum_p p\alpha_{lp}} \quad .$$

20.2.2.SATZ: 1) $H^n_{\Gamma\Lambda}:\Gamma_n(R[X]) \longrightarrow \Lambda_n(R[X])$ ist ein R-Modul-Isomorphismus.

2) $\Lambda_n(R[X]) = \Gamma_n(R[X])(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)$. $\Lambda_n(R[X])$ ist also freier $\Gamma_n(R[X])$-Modul vom Rang 1.

20.2.3.BEM.: Satz 20.2.2. ist eine Version der bekannten Isomorphie zwischen symmetrischen und schief-symmetrischen Polynomen. (Vgl. etwa [MacDo 79]I.3. oder [Gar 77]

BEW. von Satz 20.2.2.: 2) folgt wegen der speziellen Form von $H^n_{\Gamma\Lambda}$ sofort aus 1).

1) Die Basis $\underline{\underline{D_\Lambda}} := \{ b_i := X^{i_1}\wedge\ldots\wedge X^{i_n} \mid i_1>i_2>\ldots>i_n\geq 0\}$ von $\Lambda_n(R[X])$ wird lexikographisch bezgl. der Tupel $(i_1,\ldots,i_n)$ geordnet.

Die Basis $\underline{\underline{D_\Gamma}} := \{ c_\alpha := \prod_{j\in\mathbb{N}_o} X^{j\left[\alpha_j\right]} \mid \sum_j \alpha_j = n \}$ von $\Gamma_n(R[X])$ wird

folgendermaßen mit einer Wohlordnung versehen:

$c_\alpha > c_\beta \iff$ Entweder $m_\alpha := \max\{j \mid \alpha_j \neq 0\} > m_\beta := \max\{j \mid \beta_j \neq 0\}$
oder $m_\alpha = m_\beta$ und $(\alpha_{m_\alpha}, \alpha_{m_\alpha - 1}, \ldots, \alpha_0) >$
$(\beta_{m_\alpha}, \beta_{m_\alpha - 1}, \ldots, \beta_0)$ in der lexikogr. Ordnung.

Betrachte $H^n_{\Gamma\Lambda}(c_\alpha) = \sum_{(\alpha_{ij}) \in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)} \bigwedge_{l \in \underline{n}} X_p^{n-l+\sum p\alpha_{lp}}$!

$\bigwedge_{l \in \underline{n}} X_p^{n-l+\sum p\alpha_{lp}}$ ist entweder 0 oder bis auf das Vorzeichen ein Element aus D_Λ. Für welches $(\alpha_{ij})_{i,j}$ erhält man das maximale Element aus D_Λ? Der größte Wert, den $\sum_p p\alpha_{lp}$ für irgendein l überhaupt annehmen kann, ist $k_1 := \max\{p \mid \alpha_p \neq 0\}$, denn für $p > k_1$ gilt $\alpha_{lp} \leq \sum_l \alpha_{lp} = \alpha_p = 0$. n-l nimmt den größten Wert bei l=1 an. Die Kombination führt dazu, $\alpha_{1k_1} := 1$ zu setzen. Wegen $\sum_p \alpha_{1p} = 1$ folgt dann $\alpha_{1p} = 0 \ \forall p \neq k_1$.

Um auch $\sum_p p\alpha_{2p}$ maximal werden zu lassen, setzt man $\alpha_{2k_2} = 1$ für $k_2 := \max\{p \mid \alpha'_p \neq 0\}$ mit $\alpha'_p := \begin{cases} \alpha_p & \text{für } p \neq k_1 \\ \alpha_p - 1 & \text{für } p = k_1 \end{cases}$.

Diese Reduktion von α_{k_1} ist nötig, um die Spaltenbedingung $\sum_l \alpha_{lp} = \alpha_p$ in jedem Fall einzuhalten. Das Vorgehen wird iteriert.

$$\alpha^1_p := \alpha_p \quad \forall p \in \mathbb{N}_0, \ k_1 = \max\{p \mid \alpha^1_p \neq 0\}$$

$$\alpha^l_p := \begin{cases} \alpha^{l-1}_p & \forall p \neq k_{l-1} \\ \alpha^{l-1}_p - 1 & \text{für } p = k_{l-1} \end{cases}, \quad k_l := \max\{p \mid \alpha^l_p \neq 0\}$$

für $1 < l \leq n$.

Für $l \in \underline{n}$ setzt man dann $\alpha_{lp} := \delta_{pk_l}$.

$\bigwedge_{l\in\underline{n}} X_p^{n-l+\sum p\alpha_{lp}} = \bigwedge_{l\in\underline{n}} X_p^{n-l+k_l}$ ist dann maximal, und es gilt somit: $H^n_{\Gamma\Lambda}(c_\alpha) = b_{(n-l+k_l)_l} + \sum_{(i_l)_l<(n-l+k_l)_l} a_{\alpha i} b_i$ mit $a_{\alpha i}\in R$.

b) Die oben definierte Zuordnung $c_\alpha \longmapsto b_{(n-l+k_l)_l}$ ist surjektiv, denn für $b_i\in D_\Lambda$ ist $i_n\geq 0$, $i_{n-1}\geq 1,\ldots,i_1\geq n-1$ und damit $i_l=n-l+k_l$ mit $k_l\geq 0$ $\forall l\in\underline{n}$ und $k_l-k_{l+1}=i_l-i_{l+1}-1\geq 0$. Mit $\alpha_p := \sum_{l\in\underline{n}} \delta_{pk_l}$ $(\forall p\in\mathbb{N}_0)$ gilt dann: b_i ist das Bild von c_α .

($\alpha_p^r = \sum_{r\leq l\leq n} \delta_{pk_l}$, Bew. durch Induktion über r !)

c) Ist in D_Λ $b_i<b_j$, so existiert ein $r\in\underline{n}$ mit (i) $i_l=j_l$ $\forall l<r$ und (ii) $i_r<j_r$. Konstruiert man wie in b) Urbilder c_α von b_i und c_β von b_j, so gilt:

$k_l(\alpha) = i_l-n+l = j_l-n+l = k_l(\beta)$ für $l<r$ und

$k_r(\alpha) = i_r-n+r < j_r-n+r = k_r(\beta)$ für $l=r$.

Wegen $k_p\geq k_{p+1}$ $\forall p\in\underline{n-1}$, hat man also (i) $\alpha_p=\beta_p$ $\forall p\in k_r(\beta)$ und (ii) $\alpha_{k_r(\beta)} = \sum_{l\in\underline{n}} \delta_{k_r(\beta)k_l(\alpha)} = \sum_{l<r} \delta_{k_r(\beta)k_l(\beta)} + \sum_{r\leq l\leq n} \delta_{k_r(\beta)k_l(\alpha)}$

$= \sum_{l\in\underline{r}} \delta_{k_r(\beta)k_l(\beta)}$, da für $r\leq l\leq n$ $k_l(\alpha)\leq k_r(\alpha)\leq k_r(\beta)$ ist.

Wegen $\delta_{k_r(\beta)k_r(\beta)}=1$ folgt daraus $\alpha_{k_r(\beta)}<\beta_{k_r(\beta)}$.

Ergebnis: $c_\alpha < c_\beta$; die Zuordnung $c_\alpha \longmapsto b_{(n-l+k_l)_l}$ erhält die Ordnung.

Die Behauptung des Satzes folgt jetzt mit A.I.1.. ■

Die übliche Form der Bijektion zwischen symmetrischen und schief-symmetrischen Polynomen in $X_1,\ldots,X_n$ ist eine Rechts-

multiplikation mit der Vandermonde-Determinante $|X_i^{n-j}|_{i,j\in\underline{n}}$.
Mit dem Isomorphismus $R[X_1,\ldots,X_n]\cong T_n(R[X])$ (vgl.16.1.)
erhält man als das Element in $T_n(R[X])$, daß zur Vandermonde
-Determinante gehört gerade

$$D := \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}\sigma\ \bar{\sigma}(X^{n-1}\otimes\ldots\otimes X^0) = \iota_\Lambda(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0) \quad \text{(vgl.19.1.)}$$

20.2.4. Folgendes Diagramm kommutiert:

(D_9)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n(R[X]) & \xrightarrow{H^n_{\Gamma\Lambda}} & \Lambda_n(R[X]) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_\Lambda} \\ T_n(R[X]) & \xrightarrow{\rho_D} & T_n(R[X]) \end{array}$$

Dabei ist ρ_D die Rechtsmultiplikation mit D.

BEW.: Für $z\in\Gamma_n(R[X])$ ist z.z.: $\iota_\Gamma(z)\cdot D = \iota_\Lambda(z\cdot X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0)$
$=$ $z\cdot\iota_\Lambda(X^{n-1}\wedge\ldots\wedge X^0) = z\cdot D$.
19.1.1.

$z\cdot D = \beta_T\circ\Gamma_n(\lambda)(z)(D)$, wobei $\lambda: R[X] \longrightarrow \operatorname{End}(R[X]))$ wieder die Linksmultiplikation sein soll. (Vgl.6.2.6.)

Nach 6.2.2. gilt dann: $z\cdot D = \beta'_T\circ\iota_\Gamma\circ\Gamma_n(\lambda)(z)(D)$ $=$
ι_Γ nat. Transf.
$= \beta'_T\circ T_n(\lambda)(\iota_\Gamma(z))(D)$.

$\beta'_T\circ T_n(\lambda)$ ist aber gerade die Linksmultiplikation auf der Algebra $T_n(R[X])$ (vgl. 6.2.1.). ■

20.2.5.BEM.: Zwischen ρ_D und $(\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\ \bar{\sigma})^*$ besteht folgender Zusammenhang, der sich sofort verifizieren läßt (vgl. auch 19.1.2.):

(D_{10})

$$\begin{array}{ccc} T_n(R[X]) & \xrightarrow[T_n(\lambda)]{} & T_n(\mathrm{End}(R[X])) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_D} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'_T} \\ T_n(R[X]) & \xleftarrow{(X^{n-1}\otimes\ldots\otimes X^0)\hat{}} & \mathrm{End}(T_n(R[X])) \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\sum \mathrm{sgn}\sigma\ \overline{\sigma})^*_{\sigma}} \\ T_n(R[X]) & \xleftarrow{(X^{n-1}\otimes\ldots\otimes X^0)\hat{}} & \mathrm{End}(T_n(R[X])) \end{array}$$

20.2.6.KOR.: (vgl. [Gar 77] Th. 2.2.) Für jedes $m\in\mathbb{N}_o$ gilt: Der Untermodul $H_n(m)$ der homogenen Elemente vom Grad m in $\Gamma_n(R[X])$ wird unter $H^n_{\Gamma\Lambda}$ bijektiv auf den Untermodul $A_n(\frac{n(n-1)}{2}+m)$ der homogenen Elemente vom Grad $\frac{n(n-1)}{2}+m$ in $\Lambda_n(R[X])$ abgebildet. $A_n(l)=0 \quad \forall l<\frac{n(n-1)}{2}$.

BEW.: Da $H^n_{\Gamma\Lambda}$ Isomorphismus ist reicht es z.z.: $H^n_{\Gamma\Lambda}(H_n(m))\subset A(\frac{n(n-1)}{2}+m)$.

$$\prod_{j\in\mathbb{N}_o} X^{j\left[\alpha_j\right]} \in H_n(m) \Longleftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}_o} j\alpha_j = m \ .$$

Für $(\gamma_{ij})_{i\in\underline{n},\ j\in\mathbb{N}_o}\in M((1,\ldots,1);(\alpha_i)_i)$ erhält man:

$$\sum_{l\in\underline{n}} (n-l+\sum_p p\alpha_{lp}) = \sum_{i\in\underline{n-1}} i + \sum_p p \sum_{l\in\underline{n}} \gamma_{lp} = \frac{n(n-1)}{2} + \sum_p p\alpha_p \ .$$

Die Behauptung folgt mit 20.2.1.. ■

20.2.7.KOR.: $\Gamma_n(R[X])$ kann via

$$\Gamma_n(R[X]) \xrightarrow[\Gamma_n(\lambda)]{} \Gamma_n(\mathrm{End}(R[X])) \xrightarrow[\beta_{\Lambda n}]{} \mathrm{End}(\Lambda_n(R[X]))$$

als R-Subalgebra und R-direkter Summand von $\mathrm{End}(\Lambda_n(R[X]))$ betrachtet werden.

BEW.: Ist F der R-Algebra-Hom. aus der Beh., so gilt: $(X^{n-1} \ldots X^0)\hat{}\circ F = H^n_{\Gamma\Lambda}$ Isomorphismus. Es folgt die Beh.. ■

20.2.8.BEM.: Die Urbilder der Basis $\{X^{i_1}\wedge\ldots\wedge X^{i_n} \mid i_1>\ldots>i_n\geq 0\}$ von $\Lambda_n(R[X])$ unter $H^n_{\Gamma\Lambda}$ bilden eine Basis, deren Elemente die sogenannten Schur-Funktionen sind.

Bezeichnet $f_k: R^k \longrightarrow R[X]$ den durch $e_i \longmapsto X^{i-1}$ $\forall i\in\underline{k}$ gegebenen aufspaltenden R-Modul-Monomorphismus ($\{e_i\}_{i\in\underline{k}}$ Standardbasis), und definiert man für $m\in\mathbb{N}_o$

$\tilde{\tilde{H}}^{nm}_{\Gamma\Lambda}: \Gamma_n(R^{m+1}) \longrightarrow \Lambda_n(R^{m+n})$ durch

$$\prod_{i\in\underline{m+1}} e_i^{[\beta_i]} \longmapsto \sum_{(\gamma_{ij})_{i\in\underline{n},\, j\in\underline{m}_o}} \bigwedge_{i\in\underline{n}} e_{n-i+1+\sum_j j\gamma_{ij}} \; M((1,\ldots,1);(\beta_1,\ldots,\beta_{m+1}))$$

$$\left(n-i+1+\sum_j j\gamma_{ij} \leq n+\max\{j \mid \beta_{j+1}\neq 0\} \leq n+m \right) ,$$

so kommutiert folgendes Diagramm:

(D_{11})

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n(R^{m+1}) & \xrightarrow{\tilde{\tilde{H}}^{nm}_{\Gamma\Lambda}} & \Lambda_n(R^{m+n}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma_n(f_{m+1})} & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_n(f_{m+n})} \\ \Gamma_n(R[X]) & \xrightarrow{H^n_{\Gamma\Lambda}} & \Lambda_n(R[X]) \end{array}$$

$\tilde{\tilde{H}}^{nm}_{\Gamma\Lambda}$ ist demnach injektiv.

20.2.9.KOR.: $\tilde{\tilde{H}}^{nm}_{\Gamma\Lambda}: \Gamma_n(R^{m+1}) \longrightarrow \Lambda_n(R^{m+n})$ ist bijektiv.

BEW.: Es ist zu zeigen, daß die Untermoduln, die in $\Gamma_n(R[X])$ von den linear unabhängigen Elementen $\prod_{i\in\underline{m}_o} X^{i[\alpha_i]}$ mit $\sum_i \alpha_i = n$ und in $\Lambda_n(R[X])$ von den linear unabhängigen Elementen $X^{i_1}\wedge\ldots\wedge X^{i_n}$ mit $m+n>i_1>\ldots>i_n\geq 0$ aufgespannt werden, von $H^n_{\Gamma\Lambda}$ bijektiv aufeinander abgebildet werden.

Um A.I.1. anwenden zu können, bleibt nur zu zeigen, daß in Teil 1)b) des Beweises von 20.2.2. gilt: $\alpha_p = \sum_{l \in \underline{n}} \delta_{pk_l} = 0$ für alle $p>m$, wenn man von b_i mit $i_1<m+n$ ausgeht.
Annahme: $\exists p>m: \sum_{l \in \underline{n}} \delta_{pk_l} \neq 0$. Dann $\exists l \in \underline{n}: k_l>m$. Es folgt $k_1>m$ und weiter $i_1=n-1+k_1 \geq m+n$. Widerspruch! ■

20.2.10.BEM.: Ein zu (D_{11}) analoges Diagramm, in dem man die Einbettungen f_k durch Projektionen $p_k: R[X] \longrightarrow {}^{R[X]}/_{P_k} \cong R^k$ ersetzt, wobei P_k das von einem normierten Polynom vom Grad k erzeugte Ideal in $R[X]$ ist, kommutiert nicht!

KAPITEL 21 : Die Algebra $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ und das Ideal $\mathfrak{Z}_{n+1}^+$.

Die Algebra $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist nach Kapitel 16 eine nicht kommutative Verallgemeinerung der Algebra der symmetrischen Funktionen. In dieser Algebra sollen nun einige Rechnungen ausgeführt werden.
Das Element $X_1^{<1>}X_2^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ wird als algebraischer Ausdruck in Elementen $M^{<1>}$ mit Monomen M dargestellt. Es ist über einem Körper der Charakteristik 0 erzeugendes Element von $\mathfrak{Z}_{n+1}^+$ und stimmt im wesentlichen mit dem erzeugenden Element der Spuridentitäten überein,wie es etwa in [Pro 76] Th.4.3.b angegeben wird.
Weiter wird eine spezielle Basis für die Anwendung im nächsten Kapitel ermittelt, und einige Vorraussetzungen für die Rechnungen in Kapitel 26 werden bereitgestellt.

21.1. Im Folgenden durchlaufe in der Darstellung $R\{X_k\}_k$ der Index k (oder ein anderer an dieser Stelle verwendeter Index) stets eine der Mengen $\mathbb{N}$ oder $\underline{r}$ mit $r\in\mathbb{N}$, sofern nicht ausdrücklich eine Indexmenge angegeben ist.
Die freie Algebra $R\{X_k\}_k$ ist sogar eine Bigebra mit $\Delta(X_k):=X_k\otimes 1 + 1\otimes X_k$, $\Delta(1_R):=1\otimes 1$ und $\varepsilon(X_k):=0\ \forall k$, $\varepsilon(1_R):=1_R$.

21.1.1.DEF.: Mit "Mo" oder "Mo$((X_k)_k)$" sei die Menge der Monome in $R\{X_k\}_k$ vom Grad > 0 bezeichnet. Falls eine Ordnung auf Mo nötig wird, sei dies die lexikographische.

$R\{X_k\}_k^+$:=Kernε hat die Basis Mo.
$R\{X_k\}_k^+$ ist R-Algebra ohne Eins, und es gilt: $R\{X_k\}_k=R\{X_k\}_k^+\hat{\oplus}R$.

21.1.2.LEMMA: $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist die von den Elementen $M^{<\alpha>}$ mit $M\in$Mo und $\alpha\in\mathbb{N}$ erzeugte Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k)$.

BEW.: Da Mo multiplikativ abgeschlossen ist, ist Mo speziell R-Lin..Andererseits wird $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ von den Elementen $\prod_{M\in Mo} M^{<\alpha_M>}$ mit $\sum_{M\in Mo}\alpha_M<\infty$ als R-Modul erzeugt. Die Behauptung folgt aus 9.2.6. . ■

21.1.3.LEMMA: Ist R ein Körper der Char. 0, so ist $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ die von den Elementen $M^{<1>}$ mit $M\in$Mo erzeugte R-Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k)$.

BEW.: Folgt aus 9.2.9. und 1.2.7.. ■

Wie in 13.1.5. bezeichne $\mathfrak{F}_n^+$ das Ideal $\mathfrak{F}_n^+:=\hat{\bigoplus}_{i\geq n}\hat{\Gamma}_i(R\{X_k\}_k^+)$ von

$\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$. Nach 13.2.7. gilt also:

21.1.4. $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/\mathfrak{T}_{n+1}^+ \cong (\Gamma_n(R\{X_k\}_k),\tau)$ als R-Algebra. ■

Für die nachfolgende Rechnung in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ sind einige Vorüberlegungen nötig.

21.1.5.DEF.: Für eine endliche angeordnete Menge M mit $|M|=k$ sei die Menge der Permutationen von M mit $\Sigma_k(M)$ bezeichnet.

$$Z_k(M) := \dot{\bigcup_{l\in\underline{k}}} \dot{\bigcup_{\substack{r_1+\ldots+r_l=k \\ (r_i\in\mathbb{N})}}} \{((i_{11},\ldots,i_{1r_1}),\ldots,(i_{l1},\ldots,i_{lr_l}))|$$

1) $\{i_{11},\ldots,i_{1r_1},\ldots,i_{l1},\ldots,i_{lr_l}\}=M$

2) $i_{pr_p}>i_{pq}$ $\forall p\in\underline{l}$, $1<q\leq r_p$

3) $i_{pr_p}>i_{qr_q}$ $\forall p>q$; $p,q\in\underline{l}$ }

$$Z^k(M) := \dot{\bigcup_{l\in\underline{k}}} \dot{\bigcup_{\substack{r_1+\ldots+r_l=k \\ (r_i\in\mathbb{N})}}} \{((i_{11},\ldots,i_{1r_1}),\ldots,(i_{l1},\ldots,i_{lr_l}))|$$

1) wie oben

2') $i_{p1}<i_{pq}$ $\forall p\in\underline{l}$, $1<q\leq r_p$

3') $i_{p1}<i_{q1}$ $\forall p<q$; $p,q\in\underline{l}$ }

21.1.6. a) $\Sigma_k(M) = \{ \sigma:=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l1},\ldots,i_{lr_l}) \mid ((i_{11},\ldots,i_{1r_1}),\ldots,(i_{l1},\ldots,i_{lr_l})\in Z_k(M)\}$

b) $\Sigma_k(M) = \{ \sigma:=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l1},\ldots,i_{lr_l}) \mid ((i_{11},\ldots,i_{1r_1}),\ldots,(i_{l1},\ldots,i_{lr_l}))\in Z^k(M) \}$

BEW. von a) (b) analog) :

α) Wegen 1) ist $(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l1},\ldots,i_{lr_l})$ die Zyklen-Schreibweise einer Permutation aus $\Sigma_k(M)$.

β) Ist $(i'_{11},\ldots,i'_{1r_1})\ldots(i'_{l1},\ldots,i'_{lr_l})$ die Zyklenschreibweise einer Permutation aus $\Sigma_k(M)$, so läßt sich jeder Zyklus $(i'_{p1},\ldots,i'_{pr_p})$ eindeutig als $(i_{p1},\ldots,i_{pr_p})$ mit $i_{pr_p}>i_{pq}$ für alle $1\leq q\leq r_p$ schreiben. Für diese neuen Zyklen existiert genau eine Anordnung, so daß $i_{pr_p}>i_{qr_q}$ ist für alle $p>q$ mit $p,q\in\underline{l}$. ■

Im Folgenden werden die bijektiven Mengen $\Sigma_k(M)$ und $Z_k(M)$ häufig identifiziert, ebenso $\Sigma_k(M)$ und $Z^k(M)$.

21.1.7.SATZ: In $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ gilt für alle k :

$$X_1^{<1>}X_2^{<1>}\ldots X_k^{<1>} =$$

$$= \sum_{\sigma=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l1},\ldots,i_{lr_l})\in Z_k(\underline{k})} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{j\in\underline{l}} (X_{i_{j1}}X_{i_{j2}}\ldots X_{i_{jr_j}})^{<1>} =$$

$$= \sum_{\sigma=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l1},\ldots,i_{lr_l})\in Z^k(\underline{k})} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{j\in\underline{l}} (X_{i_{j1}}X_{i_{j2}}\ldots X_{i_{jr_j}})^{<1>} .$$

BEW. der ersten Gleichheit durch Induktion über k:

k=1: klar; k ⟶ k+1: Sei $((i_{11},\ldots,i_{1r_1}),\ldots,(i_{l1},\ldots,i_{lr_l}))$ ein Element aus $Z_{k+1}(\underline{k+1})$. Mit 2),3) folgt $i_{lr_l}=k+1$.

$$\sum_{\sigma=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l1},\ldots,i_{lr_l})\in Z_{k+1}(\underline{k+1})} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{j\in\underline{l}} (X_{i_{j1}}X_{i_{j2}}\ldots X_{i_{jr_j}})^{<1>} =$$

$$= \sum_{p\in\underline{k}_o} \{(k_i)_i \in \sum_{(\underline{k})^p} | k_i \neq k_j \ \forall i\neq j\} \ W_{p,(k_i)_i} \qquad \text{mit } W_{p,(k_i)_i} :=$$

$$= \sum_{\sigma=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l-11},\ldots,i_{l-1r_{l-1}})(k_1,\ldots,k_p,k+1)\in Z_{k+1}(\underline{k+1})} \operatorname{sgn}\sigma \ (\tau_{j\in\underline{l-1}}(X_{i_{j1}}X_{i_{j2}}\ldots X_{i_{jr_j}})^{<1>})\tau(X_{k_1}\ldots X_{k_p}X_{k+1})^{<1>} =$$

$$= (-1)^p \Big(\sum_{\sigma=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{l-11},\ldots,i_{l-1r_{l-1}})\in Z_{k-p}(\underline{k}-\{k_1,\ldots,k_p\})} \operatorname{sgn}\sigma \ \tau_{j\in\underline{l-1}}(X_{i_{j1}}\ldots X_{i_{jr_j}})^{<1>} \Big) \tau(X_{k_1}\ldots X_{k_p}X_{k+1})^{<1>}$$

$$\underset{\text{Ind.Vor.}}{=} (-1)^p \ X_1^{<1>}\ldots(X_{k_1}^{<1>})\hat{}\ldots(X_{k_p}^{<1>})\hat{}\ldots X_k^{<1>} \ \tau(X_{k_1}\ldots X_{k_p}X_{k+1})^{<1>}$$

(.)^ bedeutet hier Auslassen der betreffenden Größe.

Andererseits hat man:

$$X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>}X_{k+1}^{<1>} =$$

$$X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>} \ \tau \ X_{k+1}^{<1>} - \sum_{i\in\underline{k}} X_1^{<1>}\ldots(X_i^{<1>})\hat{}\ldots X_k^{<1>}(X_iX_{k+1})^{<1>} =$$

$$= X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>} \ \tau \ X_{k+1}^{<1>} - \sum_{i\in\underline{k}} X_1^{<1>}\ldots(X_i^{<1>})\hat{}\ldots X_k^{<1>} \ \tau \ (X_iX_{k+1})^{<1>}$$

$$+ \sum_{i\in\underline{k}} \sum_{j\in\underline{k}-\{i\}} X_1^{<1>}\ldots(X_i^{<1>})\hat{}\ldots(X_j^{<1>})\hat{}\ldots X_k^{<1>}(X_jX_iX_{k+1})^{<1>} =$$

$$= \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \sum_{p\in\underline{k}_o} (-1)^p \sum_{\{(k_i)\in(\underline{k})^p \,|\, k_i\neq k_j \ \forall i\neq j\}} X_1^{<1>}\ldots(X_{k_1}^{<1>})\hat{}\ldots(X_{k_p}^{<1>})\hat{}\ldots X_k^{<1>} \ \tau \ (X_{k_1}\ldots X_{k_p}X_{k+1})^{<1>}$$

Die zweite Gleichheit folgt analog, wenn man $X_1^{<1>}$ und im Weiteren alle Produkte $X_1X_{k_1}\ldots X_{k_p}^{<1>}$ nach links aus $X_1^{<1>}X_2^{<1>}\ldots X_{k+1}^{<1>}$ herauszieht. ■

Als Spezialfall des Satzes erhält man:

21.1.8. $X^{\langle 1\rangle}_{n\text{-mal}} \ldots X^{\langle 1\rangle} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}\sigma\, X_{i_{11}} \ldots X_{i_{1r_1}}{}^{\langle 1\rangle} \tau \ldots \tau\, X_{i_{l1}} \ldots X_{i_{lr_l}}{}^{\langle 1\rangle} \Big|_{X_i = X}$

$$= \sum_{1\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n} (-1)^{(\sum (i+1)\alpha_i)} \frac{n!}{1^{\alpha_1}\ldots n^{\alpha_n}\alpha_1!\ldots\alpha_n!} (X^{1\langle 1\rangle})^{\tau\alpha_1} \tau \ldots \tau (X^{n\langle 1\rangle})^{\tau\alpha_n}$$

Dabei wurde benutzt, daß die Anzahl der Permutationen vom festen Zyklentyp $1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n}$ gerade $\frac{n!}{1^{\alpha_1}\ldots n^{\alpha_n}\alpha_1!\ldots\alpha_n!}$ ist (vgl. [Knut 73] III.1.).

Ist die Charakteristik von R eine Primzahl p, so gilt:

21.1.9. $0 = X^{\langle 1\rangle}_{p\text{-mal}} \ldots X^{\langle 1\rangle} = X^{\langle 1\rangle^{\tau p}} + (p-1)!\, X^{p\langle 1\rangle} \underset{\text{s.o. } 16.3.2.}{=}$

$$= ((p-1)!+1)\, X^{p\langle 1\rangle} = (((p-1)!+1)\, X^p)^{\langle 1\rangle}$$

Setzt man $R = \mathbb{Z}_p$ und spezialisiert auf die R-Algebra $A := \mathbb{Z}_p$ mit $X \longmapsto 1_{\mathbb{Z}_p}$, so erhält man $(((p-1)!+1)1_{\mathbb{Z}_p})^{\langle 1\rangle} = 0$. Wegen $A \cong \Gamma_1(A) \cong \hat{\Gamma}_1(A)$ folgt daraus der

SATZ von Wilson: $(p-1)!+1 \equiv 0 \ (p)$.

Satz 21.1.7. läßt sich verallgemeinern. Dazu wird die folgende Definition benötigt.

21.1.10.DEF.: Für alle $l\in\mathbb{N}$ sei $S(l)$ die R-Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ die erzeugt wird von den Elementen $M^{\langle\alpha\rangle}$ mit $M\in Mo$ und $\alpha\leq l$.

Beachte: Über einem Körper der Char. 0 ist bereit $S(1)$ ganz $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$.

21.1.11.SATZ: In $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ gilt für alle k und für alle $l\in\mathbb{N}$:

$$X_1^{<l>}\ldots X_k^{<l>} \equiv$$

$$\sum_{\sigma=(i_{11},\ldots,i_{1r_1})\ldots(i_{j1},\ldots,i_{jr_j})\in Z_k(\underline{k})} \operatorname{sgn}\sigma \; \tau_{s\in\underline{j}} \left(X_{i_{s1}} X_{i_{s2}}\ldots X_{i_{sr_s}}\right)^{<l>} \quad \mathrm{mod}\ S(l-1)\ .$$

BEW.: Induktion über k liefert analog zum Fall l=1 die Beh., wenn man zusätzlich beachtet:

$$a_1^{<l>}\ldots a_i^{<l>}\,\tau\, a_{i+1}^{<l>} = a_1^{<l>}\ldots a_{i+1}^{<l>} + \sum_{j\in\underline{i}} a_1^{<l>}\ldots a_j a_{i+1}^{<l>}\ldots a_i^{<l>} +$$

+ Summe von Elementen $b_1^{<\alpha_1>}\ldots b_r^{<\alpha_r>}$ mit $b_s=a_s a_i$ oder a_s $\forall s$ und $\alpha_s<l$ für mindestens ein $s\in\underline{r}$.

$b_1^{<\alpha_1>}\ldots b_r^{<\alpha_r>}$ ist also aus S(l-1) nach 9.2.4.. ■

Für jede Familie $(g_i)_i$ aus $R\{X_i\}_i^+$ existiert genau ein R-Algebra-Hom. $\bar{t}((g_i)_i):R\{X_i\}_i \longrightarrow R\{X_i\}_i$ mit $X_i \longmapsto g_i$.

Es gilt $\bar{t}((g_i)_i)(R\{X_i\}_i^+) \subset R\{X_i\}_i^+$.

Schreibe $\underline{\underline{F((g_i)_i)}}$ für $\hat{\Gamma}(\bar{t}(g_i)_i))\Big|_{\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+),\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)}$.

21.1.12.DEF.: Ein Ideal I von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ heißt " T-Ideal"

$\Longleftrightarrow \forall (g_i)_i$ Familie aus $R\{X_i\}_i^+$ $\forall z\in I : F((g_i)_i)(z)\in I$.

(oder $\hat{\Gamma}(f)(z)\in I$ für alle R-Alg.-Hom. ohne Eins f von $R\{X_i\}_i^+$ nach $R\{X_i\}_i^+$.)

Da $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ selbst T-Ideal ist, und der Durchschnitt von T-Idealen wieder T-Ideal ist, existiert zu einer beliebigen

Teilmenge Y von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ stets ein kleinstes T-Ideal, welches Y enthält, das "von Y erzeugte T-Ideal".
Unmittelbar klar ist:

21.1.13. $\mathfrak{T}_{n+1}^+$ ist T-Ideal $\forall n \in \mathbb{N}_o$.

Für $X_{j+1} \in \hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ sei $\nabla^j : \hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ gegeben durch $\nabla^j := F((X_1+X_{j+1}, X_2, X_3, \ldots)) - F((X_1, X_2, \ldots)) - F((X_{j+1}, X_2, \ldots))$

$\overline{\nabla}^j : \hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ sei definiert durch

$\overline{\nabla}^j := \nabla^j \circ \nabla^{j-1} \circ \ldots \circ \nabla^1$.

∇^j und $\overline{\nabla}^j$ sind R-lineare Operatoren.

Bsp.: $\overline{\nabla}^1(X_1^{<k>}) = \nabla^1(X_1^{<k>}) = (X_1+X_2)^{<k>} - X_1^{<k>} - X_2^{<k>} =$

$$= \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2 \in \mathbb{N}}} X_1^{<k_1>} X_2^{<k_2>} .$$

21.1.14. $$\overline{\nabla}^j(X_1^{<k>}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{j+1}=k \\ k_1,\ldots,k_{j+1} \in \mathbb{N}}} X_1^{<k_1>} \ldots X_{j+1}^{<k_{j+1}>} .$$

BEW. durch Induktion über j: Vgl. Bsp. für j=1.

$j-1 \longrightarrow j$: $\overline{\nabla}^j(X_1^{<k>}) = \nabla^j \circ \overline{\nabla}^{j-1}(X_1^{<k>}) \overset{\text{Ind. Vor.}}{=}$

$$= \nabla^j \Big(\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_j=k \\ k_1,\ldots,k_j \in \mathbb{N}}} X_1^{<k_1>} \ldots X_j^{<k_j>} \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_j=k \\ k_1,\ldots,k_j \in \mathbb{N}}} \big((X_1+X_{j+1})^{<k_1>} X_2^{<k_2>} \ldots X_j^{<k_j>} - X_1^{<k_1>} \ldots X_j^{<k_j>} - X_{j+1}^{<k_1>} X_2^{<k_2>} \ldots X_j^{<k_j>} \big) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_j=k \\ k_1,\ldots,k_j\in\mathbb{N}}} \sum_{\substack{k_1'+k_{j+1}=k_1 \\ k_1',k_{j+1}\in\mathbb{N}}} X_1^{<k_1'>} X_2^{<k_2>} \ldots X_{j+1}^{<k_{j+1}>} \quad . \blacksquare$$

Für $X_{k+1}\in\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ ergibt sich als Folgerung:

21.1.15. $\bar{\nabla}^{k-1}(X_1^{<k>}) = X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>}$

$\bar{\nabla}^{k} \quad (X_1^{<k>}) = 0 \ .$

21.1.16.LEMMA: Für $X_k, X_1\in\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$ gilt:

a) $X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>}$ liegt in dem von $X_1^{<k>}$ erzeugten T-Ideal von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$.

b) Ist $k\leq 1$, so liegt $X_1^{<1>}\ldots X_1^{<1>}$ in dem von $X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>}$ erzeugten T-Ideal von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_i^+)$.

BEW.: a) folgt sofort aus 21.1.15..

b) Induktion über j:=1-k: Der Fall j=0 ist klar.

$j \longrightarrow j+1$: $X_1^{<1>}\ldots X_1^{<1>} = X_1^{<1>}\ldots X_{1-1}^{<1>}\,\tau X_1^{<1>}$

$$- \sum_{i\in\underline{1-1}} X_1^{<1>}\ldots(X_i^{<1>})\hat{}\ldots X_{1-1}^{<1>}X_iX_1^{<1>}$$

liegt in dem von $X_1^{<1>}\ldots X_{1-1}^{<1>}$ erzeugten T-Ideal, da etwa

$F((X_1,\ldots,X_i,X_iX_1,X_{i+1},\ldots))(X_1^{<1>}\ldots X_{1-1}^{<1>}) =$

$= X_1^{<1>}\ldots(X_i^{<1>})\hat{}\ldots X_{1-1}^{<1>}X_iX_1^{<1>}$ ist. $\blacksquare$

21.1.17. Ist R ein Körper der Charakteristik 0, so gilt:

a) $\mathfrak{T}_{n+1}^+$ ist das von $X_1^{<n+1>}$ erzeugte T-Ideal von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}^+)$

b) $\mathfrak{T}_{n+1}^+$ ist das von $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ erzeugte T-Ideal von $\hat{\Gamma}(R\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}^+)$.

BEW.: Das von $X_1^{<n+1>}$ erzeugte T-Ideal enthält nach 21.1.16. alle Elemente $X_1^{<1>}\ldots X_k^{<1>}$ mit k>n und damit ganz $\mathfrak{T}^+_{n+1}$. Da $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ T-Ideal ist folgt die erste Behauptung. Wegen

$X_1^{<n+1>} = (n+1)!^{-1}\, X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}\Big|_{X_i=X_1\ \forall i}$ erzeugt auch $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ ganz $\mathfrak{T}^+_{n+1}$. ■

Sind M und N Monome aus Mo, so kann man folgende Rechnung ausführen:

$$MN^{i<1>} = \underset{\text{falls } i>0}{MN^{i-1<1>}\,\tau N^{<1>} - MN^{i-1<1>}\,N^{<1>}} = \underset{\text{falls } i>1}{}$$

$$= MN^{i-1<1>}\,\tau N^{<1>} - MN^{i-2<1>}\,\tau N^{<2>} + MN^{i-2<1>}\,N^{<2>} =$$

$$\underset{\text{falls } i>2}{} MN^{i-1<1>}\,\tau N^{<1>} - MN^{i-2<1>}\,\tau N^{<2>} + MN^{i-3<1>}\,\tau N^{<3>} - MN^{i-3<1>}\,N^{<3>}$$

u.s.w.

$$\Longrightarrow MN^{i<1>} = -\Big(\sum_{j\in \underline{i}} (-1)^j\, MN^{i-j<1>}\,\tau N^{<j>}\Big) + (-1)^i\, M^{<1>}N^{<i>}$$

n sei nun beliebig aber fest, i≥n. Dann gilt:

$$MN^{i<1>} \equiv -\sum_{j\in \underline{n}} (-1)^j\, MN^{i-j<1>}\,\tau N^{<j>} \mod \mathfrak{T}^+_{n+1} \qquad (*)$$

Denn für j>n ist $N^{<j>}\in\mathfrak{T}^+_{n+1}$ und $M^{<1>}N^{<i>}\in\mathfrak{T}^+_{i+1}\subset\mathfrak{T}^+_{n+1}$.

21.1.18. Für alle i∈ℕ gilt:

$MN^{i<1>}$ liegt modulo $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ in der von $N^{<1>},\ldots,N^{<n>}$ und $MN^{0<1>}, MN^{1<1>},\ldots, MN^{n-1<1>}$ erzeugten Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$.

BEW.: Die Aussage ist sicher richtig für $i<n$. Für $i\geq n$ ergibt sich aus (*), daß modulo $\mathfrak{F}^+_{n+1}$ das Element $MN^{i}{}^{<1>}$ in der von $N^{<1>},\ldots,N^{<n>}$ und $MN^{i-n}{}^{<1>},\ldots,MN^{i-1}{}^{<1>}$ erzeugten Subalgebra liegt. Die Behauptung folgt induktiv. ∎

Zum Abschluß des Kapitels soll jetzt noch eine spezielle Basis von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ behandelt werden.
Nach 13.4.1. hat $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ die Basis $B:=\{ \tau_{M\in Mo} M^{<\alpha_M>} \mid |\alpha|<\infty \}$
Wegen der Nicht-Kommutativität müssen hierbei die Elemente von Mo in einer festen Reihenfolge ausmultipliziert werden!
Ist $M\in Mo$ eine Potenz, d.h. $M=N^l$ mit $N\in Mo$ und $1\leq l\in\mathbb{N}$, so kann man $M^{<\alpha_M>} = N^{l<\alpha_M>}$ als Spezialisierung ($X\longmapsto N$) des Elements $X^{l<\alpha_M>}$ in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ betrachten. In $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ kann man $X^{l<\alpha_M>}$ aber als Polynom in den $X^{<i>}$ schreiben und damit $N^{l<\alpha_M>}$ in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ als Polynom in den $N^{<i>}$.

21.1.19.DEF.: $\Omega:=\{ M\in Mo \mid \nexists (N,l)\in Mo\times(\mathbb{N}-\{1\}) : M=N^l \}$

Die Elemente von Ω heißen "azyklisch", die aus Mo-Ω "zyklisch". (Eine Begründung für diese Bezeichnung folgt im nächsten Kapitel.)
Ω sei mit einer beliebigen aber festen Anordnung versehen.

$Mo\in M$ azyklisch $\Longleftrightarrow$ $\max\{l\in\mathbb{N} \mid \exists N\in Mo: M=N^l\}= 1$

$Mo\ni M=L^{\max\{l\in\mathbb{N} \mid \exists N\in Mo: M=N^l\}}$ mit L aus Mo $\Rightarrow$ L ist azyklisch.

21.1.20.SATZ: $B':=\{ \tau_{M\in\Omega} (\tau_{i\in\mathbb{N}} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}}) \mid \sum_{M\in\Omega}\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{Mi}<\infty\}$ ist Basis von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$.

In 21.1.20. muß natürlich wieder in einer festen Reihenfolge ausmultipliziert werden.

BEW.: Für jedes $M \in \Omega$ sei X_M eine Unbestimmte über R.

Der durch $\tau_{i \in \mathbb{N}} (X_M^i)^{<\alpha_i>} \longmapsto X_M^{<\alpha_1+\alpha_2+\ldots>} \tau X_M^{<\alpha_2+\alpha_3+\ldots>} \tau \ldots$

auf einer Basis (16.1.13.) definierte R-Modul-Hom.

F_M: $\hat{\Gamma}(R[X_M]^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$ ist sogar ein Isomorphismus, denn

1) $\infty > \alpha_1+\alpha_2+\ldots \geq \alpha_2+\alpha_3+\ldots \geq \ldots$, also ist

$X_M^{<\alpha_1+\alpha_2+\ldots>} \tau X_M^{<\alpha_2+\alpha_3+\ldots>} \tau \ldots = e(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ mit

$\lambda_i := \alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots$. Diese Elemente bilden nach 16.1.4. eine Basis von $\hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$.

2) Die Abbildung $(\alpha_i)_i \longmapsto (\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots)_i$ ist umkehrbar.

$F := \bigotimes_{M \in \Omega} F_M : \bigotimes_{M \in \Omega} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+) \longrightarrow \bigotimes_{M \in \Omega} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$ ist dann ebenfalls ein R-Modul-Isomorphismus ([Bou 74] II§3.7. Cor.2).

Der durch $\tau_{M \in \Omega} (\tau_{i \in \mathbb{N}} (M^i)^{<\alpha_{Mi}>}) \longmapsto \bigotimes_{M \in \Omega} \tau_{i \in \mathbb{N}} X_M^{i\,<\alpha_{Mi}>}$ gegebene R-Modul-Hom.

G: $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \bigotimes_{M \in \Omega} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$ ist, da er Basis auf Basis abbildet, auch ein Isomorphismus.

Dann existiert aber ein eindeutig bestimmter R-Modul-Iso.

H: $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) & \xrightarrow{\quad H \quad} & \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \\ \downarrow G & & G \downarrow \\ \bigotimes_{M \in \Omega} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+) & \xrightarrow{\quad F \quad} & \bigotimes_{M \in \Omega} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+) \end{array}$$

Da die $\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} X_M^{i\,<\beta_{Mi}>}$ mit $|\beta_M|<\infty$ eine Basis von $\hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$ bilden, gibt es eine Darstellung (mit $a_{\beta_M}\in R$)

$$(*)\quad \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} X_M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>} = \sum_{\beta_M=(\beta_{Mi})_i} a_{\beta_M} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} (X_M^i)^{<\beta_{Mi}>} .$$

Durch Spezialisierung erhält man in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$

$$(**)\quad \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>} = \sum_{\beta_M} a_{\beta_M} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} (M^i)^{<\beta_{Mi}>} .$$

$$G\Big(\underset{M\in\Omega}{\tau}\Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>}\Big)\Big) \underset{(**)}{=}$$

$$= G\Big(\sum_{(\beta_M)_{M\in\Omega}} \Big(\prod_M a_{\beta_M}\Big) \underset{M\in\Omega}{\tau} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} (M^i)^{<\beta_{Mi}>}\Big) =$$

$$= \sum_{(\beta_M)_{M\in\Omega}} \Big(\prod_M a_{\beta_M}\Big) \otimes \underset{M\in\Omega}{\tau} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} (X_M^i)^{<\beta_{Mi}>} \underset{(*)}{=}$$

$$= \underset{M\in\Omega}{\otimes} \Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} X_M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>}\Big)$$

$$F\circ G\Big(\underset{M\in\Omega}{\tau} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} (M^i)^{<\alpha_{Mi}>}\Big) = \underset{M\in\Omega}{\otimes} \Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>}\Big) \underset{\text{s.o.}}{=}$$

$$= G\Big(\underset{M\in\Omega}{\tau}\Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>}\Big)\Big) \quad \Longrightarrow$$

$$H\Big(\underset{M\in\Omega}{\tau} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} (M^i)^{<\alpha_{Mi}>}\Big) = \underset{M\in\Omega}{\tau}\Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>}\Big) .$$

Da H Isomorphismus ist, bildet er Basis auf Basis ab. Es ist klar, daß die Elemente

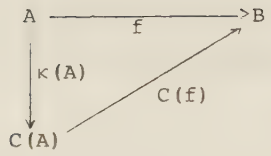
$$\underset{M\in\Omega}{\tau}\Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<\alpha_{Mi}+\alpha_{Mi+1}+\ldots>}\Big) \text{ mit } \sum_{M,i} \alpha_{Mi}<\infty \text{ ganz B' durchlaufen.}$$

■

KAPITEL 22 : Die Faktorkommutatoralgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ("Algebra der verallgemeinerten Spurpolynome") und ihre Struktur.

Spezialisiert man $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ nach $\hat{\Gamma}(End(R^n))$ und wendet dann ϕ_D an (genau das soll später gemacht werden), so ist klar, daß wegen der Kommutativität des Bildes R von ϕ_D alle Kommutatoren $[x,y]$ in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ auf die Null gehen. Um solche "trivialen Identitäten" von vorn herein zu eliminieren,ist es sinnvoll, nach dem Ideal zu faktorisieren, daß von solchen Kommutatoren erzeugt wird. Als erstes läßt sich feststellen, daß über einem Körper der Charakteristik 0 die Faktorkommutatoralgebra mit der "Algebra der kommutativen Spurpolynome" übereinstimmt. Im allgemeinen Fall ergibt eine genaue Untersuchung des Kommutatorideals nicht nur, daß es von den Elementen $MN^{<i>} - NM^{<i>}$ erzeugt wird,sondern ferner, daß es als R-Modul frei ist und direkter Summand mit ebenfalls freiem Komplement. Dies ermöglicht es, die Struktur der Faktorkommutatoralgebra aufzuklären. Die Algebra ist zerlegbar als Tensorprodukt von zu $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ isomorphen Algebren und damit ein Polynomring.

22.1.1.DEF.: Die "Faktorkommutatoralgebra" einer R-Algebra A ist das eindeutig bestimmte Paar $(C(A),\kappa(A))$ mit folgender universellen Eigenschaft:
Für alle kommutativen R-Algebren B und für alle R-Algebra-Homomorphismen f:A ——>B existiert genau ein R-Algebra-Hom. C(f): C(A) ——> B, so daß folgendes Diagramm kommutiert:



Statt $\kappa(A)$ wird auch κ_A geschrieben oder κ falls A aus dem Zusammenhang klar ist.

$(C(A),\kappa(A))$ kann realisiert werden als $\underline{C(A)} := {}^{A}/_{C}$, wobei C das von $\{[a,b] := ab-ba \mid a,b \in A\}$ in A erzeugte Ideal ("Kommutatorideal") ist , und $\underline{\kappa(A)}: A \longrightarrow {}^{A}/_{C}$ als kan. Epimorphismus ("Faktorkommutatorabbildung (Hom)").
Da zunächst nur eine einzige Algebra betrachtet wird, sollen folgende Bezeichnungen vereinbart werden:

22.1.2.DEF.: $\underline{C} := \{[a,b] := ab-ba \mid a,b \in \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)\}$;

$\underline{\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)} := {}^{\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)}/_{C}$;

$\underline{\kappa}: \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ bezeichne den kan. Epimorphis..

22.1.3.KONVENTION: Die Elemente von $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ werden in der Schreibweise nicht von denen aus $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ unterschieden.

22.1.4. C ist ein T-Ideal , da die Spezialisierung eines Kommutators sicher wieder in C liegt.

$\kappa \otimes \kappa \circ \Delta_{\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)}$ und $\varepsilon_{\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)}$ sind R-Algebra-Hom. und faktorisieren nach der universellen Eigenschaft von $(\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+),\kappa)$ über κ. Es folgt:

22.1.5. $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist R-Bigebra.

Für eine kommutative R-Algebra S sei

$f: \hat{\Gamma}^S(S\{X_k\}_k^+) \cong \hat{\Gamma}^S(R\{X_k\}_k^+ \otimes S) \cong \hat{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \otimes S$ der kan. S-Algebra-Isomorphismus.

$\kappa^R: \hat{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \overline{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+)$ sei der kan. Epi., und κ^S sei analog definiert. weiter sei $C^R := \mathrm{Kern}(\kappa^R)$ und $C^S := \mathrm{Kern}(\kappa^S)$.

$0 \longrightarrow C^R \xrightarrow[\text{Einb.}]{\iota} \hat{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \xrightarrow[\kappa^R]{} \overline{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow 0$ ist exakt,

und damit ist wegen der Rechtsexaktheit des Tensorfunktors

$C^R \otimes S \xrightarrow{\iota \underline{\otimes} id_S} \hat{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \otimes S \xrightarrow{\kappa^R \underline{\otimes} id_S} \overline{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \otimes S \longrightarrow 0$

ebenfalls exakt.

$\mathrm{Kern}(\kappa^R \underline{\otimes} id_S) = \iota \underline{\otimes} id_S(C^R \otimes S) = \{\sum_i x_i \otimes s_i \in \hat{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \otimes S \mid x_i \in C^R\}$.

Jedes $x \in C^R$ ist Linearkombination von Elementen $a\tau[b,c]\tau d$ mit $a,b,c,d \in \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$.

$f^{-1}(a\tau[b,c]\tau d \otimes 1_S) = f^{-1}((a\otimes 1_S)[b\otimes 1_S, c\otimes 1_S](d\otimes 1_S)) =$

$f^{-1}(a\otimes 1_S)[f^{-1}(b\otimes 1), f^{-1}(c\otimes 1)]f^{-1}(d\otimes 1_S) \in C^S$.

Damit gilt: $\mathrm{Kern}(\kappa^R \underline{\otimes} id_S \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Kern}(\kappa^R \underline{\otimes} id_S)) \subset C^S$.

Andererseits ist $\overline{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \otimes S$ eine kommutative S-Algebra und daher $C^S \subset \mathrm{Kern}(\kappa^R \underline{\otimes} id_S \; f)$. Es gilt daher:

<u>22.1.6.SATZ:</u> $\overline{\Gamma}^R(R\{X_k\}_k^+) \otimes S \cong \overline{\Gamma}^S(S\{X_k\}_k^+)$ mit

$\kappa^R(\prod_{M \in Mo} M^{<\alpha_M>}) \otimes 1_S \longmapsto \kappa^S(\prod_{M \in Mo} M^{<\alpha_M>})$. ■

Im Folgenden soll nun das Kommutatorideal C von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ näher untersucht werden.

Da $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ als R-Algebra erzeugt wird von den Elementen $M^{<\alpha>}$ mit $M \in Mo$ und $\alpha \in \mathbb{N}$, hat man:

22.1.7. $C = \langle \{ [M^{<\alpha>}, N^{<\beta>}] \mid M,N \in Mo;\ \alpha,\beta \in \mathbb{N} \} \rangle$

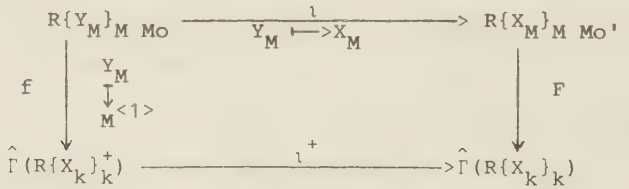
22.1.8. Ist R ein Körper der Charakteristik 0, so ist

$C = \langle \{ M^{<1>} \tau N^{<1>} - N^{<1>} \tau M^{<1>} \mid M,N \in Mo \} \rangle$

BEW.: Klar, da $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ in diesem Fall von den $M^{<1>}$ mit $M \in Mo$ erzeugt wird (13.4.2.). ■

22.1.9.SATZ: Ist R ein Körper der Charakteristik 0, so ist $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ die kommutative Algebra mit Erzeugenden $M^{<1>}$ $(M \in Mo)$ und Relationen $MN^{<1>} - NM^{<1>} = 0$ $(M,N \in Mo)$.

BEW.: Mo sei wieder die Menge der Monome vom Grad größer 0 in $R\{X_k\}_k$, $Mo' := Mo \cup \{1_R\}$.
Nach 11.1.5. ist der durch $X_M \longmapsto M^{<1>}$ $\forall M \in Mo'$ definierte R-Algebra-Hom. $F: R\{X_M\}_{M \in Mo'} \longrightarrow \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k)$ ein Epimorphismus mit Kern $I := \langle \{ z(M,N) \mid M,N \in Mo' \} \rangle$. Dabei ist für $M,N \in Mo'$ $z(M,N) := X_M X_N - X_N X_M - X_{MN} + X_{NM}$.
Folgendes Diagramm kommutiert:



f ist nach 13.4.2. ein Epimorphismus.

$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(\iota^+ \circ f) = \mathrm{Kern}(F \circ \iota) = \{ Q \in R\{Y_M\}_{M \in Mo} \mid \iota(Q) \in \mathrm{Kern}(F) \}$

Ist $\iota(Q) \in \mathrm{Kern}(F) = I$, so ist $\iota(Q)$ Linearkombination von Elementen $a \cdot z(M,N) \cdot b$ mit $M,N \in Mo'$ und $a,b \in R\{X_M\}_{M \in Mo'}$.

Sei $\pi: R\{X_M\}_{M \in Mo'} \longrightarrow R\{Y_M\}_{M \in Mo}$ der durch

$X_M \longmapsto Y_M \quad \forall M \in Mo$
$X_{1_R} \longmapsto 0$
} definierte R-Algebra-Hom..

Dann ist $\pi \circ \iota = id_{R\{Y_M\}_{M\in Mo}}$. Damit ist $Q=\pi(\iota(Q))$ Linearkombination von Elementen $a'\pi(z(M,N))b'$ mit $a',b' \in R\{Y_M\}_{M\in Mo}$ und $M,N \in Mo'$. Ist dabei M oder N gleich 1_R, so ist

$\pi(z(M,N)) = \pi(X_M)\pi(X_N) - \pi(X_N)\pi(X_M) - \pi(X_{MN}) + \pi(X_{NM}) = 0$,

da dann MN=NM ist und entweder $\pi(X_M)=0$ oder $\pi(X_N)=0$.

Sind dagegen $M,N \in Mo$, so ist

$\pi(z(M,N)) = Y_M Y_N - Y_N Y_M - Y_{MN} + Y_{NM}$.

$Q \in Kern(f)$ liegt also in dem Ideal von $R\{Y_M\}_{M\in Mo}$, das erzeugt wird von den Elementen

$Y_M Y_N - Y_N Y_M - Y_{MN} + Y_{NM}$ mit $M,N \in Mo$.

Daß diese Elemente umgekehrt in Kern$(F\circ\iota)$ und damit in Kern(f) liegen ist klar.

$\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist also die Algebra mit Erzeugenden $M^{<1>}$ für $M \in Mo$ und Relationen $M^{<1>} \tau N^{<1>} - N^{<1>} \tau M^{<1>} = MN^{<1>} - NM^{<1>}$ für $M,N \in Mo$.

Faktorisiert man noch nach C, so folgt aus 22.1.8., daß $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ als kommutative R-Algebra gegeben ist durch die Erzeugenden $M^{<1>}$ mit $M \in Mo$ und die Relationen $MN^{<1>} - NM^{<1>}$ für $M,N \in Mo$. ■

22.1.10.KOR.: Über einem Körper der Charakteristik 0 stimmt $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}})$ überein mit der "Algebra der kommutativen Spurpolynome" T in [Pro 76] 4. . T ist dabei die Faktoralgebra des Polynomrings in kommutierenden Unbestimmten $Tr(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k})$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $i_j \in \mathbb{N}$ $\forall j \in \underline{k}$ nach

dem Ideal, das erzeugt wird von den Elementen $Tr(X_{i_1}...X_{i_k}) - Tr(X_{j_1}...X_{j_k})$ für die gilt: $X_{i_1}...X_{i_k}$ ist zyklische Permutation von $X_{j_1}...X_{j_k}$.

Bew.: Man identifiziert $X_{i_1}...X_{i_k}^{<1>}$ mit $Tr(X_{i_1}...X_{i_k})$. Beachtet man noch, daß für $M,N\in Mo$ M zyklische Permutation von N genau dann ist, wenn $K,L\in Mo\cup\{1_R\}$ existieren mit KL=M und LK=N, so ist der Rest klar. ■

Nach 22.1.10. kann man also über beliebigem Grundring R $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ als Algebra "der verallgemeinerten Spur-Polynome" betrachten. Tatsächlich geht ja bei Spezialisierung $X_k \longmapsto a_k\in M_n(R)$ und anschließender Anwendung von ϕ_D $X_{i_1}...X_{i_k}^{<j>}$ über in den j-ten Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $a_{i_1}...a_{i_k}$ (falls $j\leq n$). (18.2.16)

22.2. Nun also zur Untersuchung des Kommutatorideals C bei beliebigem Grundring R!

1) Für eine R-Algebra A und Elemente $a_1,...,a_l,b$ aus A gilt: $[a_1...a_l,b]$ liegt in dem Ideal von A, das erzeugt wird von den Elementen $[a_i,b]$ mit $i\in\underline{l}$.

BEW.: $[a_1...a_l,b] = a_1...a_{l-1}[a_l,b] + [a_1...a_{l-1},b]a_l$. Die Behauptung folgt durch Induktion über l. ■

2) I sei ein Ideal in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, $n\in\mathbb{N}$ bel., $\alpha_j\in\mathbb{N}_0$ $\forall j\in\underline{n}$ und $N_j,M_j\in Mo$ $\forall j\in\underline{n}$. Dann gilt:

$$(\forall j\in\underline{n}: M_j^{<\alpha_j>} - N_j^{<\alpha_j>}\in I) \Longrightarrow \tau_{j\in\underline{n}} M_j^{<\alpha_j>} - \tau_{j\in\underline{n}} N_j^{<\alpha_j>}\in I .$$

BEW.: $\tau_{j\in\underline{n}} M_j^{<\alpha_j>} - \tau_{j\in\underline{n}} N_j^{<\alpha_j>} = (\tau_{j\in\underline{n-1}} M_j^{<\alpha_j>})\tau(M_n^{<\alpha_n>} - N_n^{<\alpha_n>}) +$

$+ (\tau_{j\in\underline{n-1}} M_j^{<\alpha_j>} - \tau_{j\in\underline{n-1}} N_j^{<\alpha_j>})\tau N_n^{<\alpha_n>}$. Die Beh. folgt induktiv. ■

22.2.1.DEF.: Für $m\in\mathbb{N}_o$ bezeichne $\underline{\underline{C_m}}$ das Ideal in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, das erzeugt wird von den Elementen $[M^{<i>},N^{<j>}]$ mit $M,N\in Mo$ und $i,j\in\mathbb{N}_o$, mit der Bedingung $Min\{i,j\}\leq m$.($C_0=\{0\}$!)

3) Für $l\in\mathbb{N}$, sowie $N,N_i\in Mo$ und $\alpha,\alpha_i\in\mathbb{N}_o$ $(\forall i\in\underline{l})$ gilt:

$$(\forall i\in\underline{l} : \alpha_i < m\in\mathbb{N}) \Longrightarrow [\prod_{i\in\underline{l}} N_i^{<\alpha_i>}, N^{<\alpha>}]\in C_{m-1} .$$

BEW.: Nach 9.2.4. ist $\prod_{i\in\underline{l}} N_i^{<\alpha_i>}$ Linearkombination von Elementen $\tau_j M_j^{<\beta_j>}$ mit $\mathbb{N}_o\ni\beta_j<m$ und $M_j\in Mo$. Es reicht also, z.z. $[\tau_j M_j^{<\beta_j>}, N^{<\alpha>}]\ C_{m-1}$. Dies folgt aber aus 1). ■

22.2.2.DEF.: Für $m\in\mathbb{N}_o$ bezeichne $\underline{\underline{Z_m}}$ das Ideal in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, das erzeugt wird von den Elementen $MN^{<i>} - NM^{<i>}$ mit $M,N\in Mo$ und $m\geq i\in\mathbb{N}_o$. ($Z_0=\{0\}$!)

4) Für $l,m\in\mathbb{N}$, sowie $M,N\in Mo$ und $j_i,\alpha_i\in\mathbb{N}_o$ $(\forall i\in\underline{l})$ gilt:

$$(\forall i\in\underline{l}: \alpha_i<m) \Longrightarrow \prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\alpha_i>} - \prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i})M^{<\alpha_i>} \in Z_{m-1} .$$

BEW.: $x := X_1^{<\alpha_1>} X_2^{<\alpha_2>} \ldots X_k^{<\alpha_k>}$ läßt sich darstellen (9.2.4.) als Linearkombination von Elementen $\tau_j M_j^{<\beta_j>}$ mit $M_j\in Mo$ und

$$m>\beta_j\in\mathbb{N}_o.\quad \prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\alpha_i>} = x\Big|_{X_r\mapsto M(N^{j_r})}$$

$$\prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i})M^{<\alpha_i>} = x\Big|_{X_r\mapsto (N^{j_r})M}\ .$$

Nach 2) reicht es, z.z.:

$$D_j := M_j^{<\beta_j>}\Big|_{X_r\mapsto M(N^{j_r})} - M_j^{<\beta_j>}\Big|_{X_r\mapsto (N^{j_r})M} \in Z_{m-1} \quad \forall j\ .$$

Für $M_j := X_u X_v .. X_w \in Mo$ erhält man:

$$D_j = M((N^{j_u})M(N^{j_v})...M(N^{j_w}))^{<\beta_j>} - ((N^{j_u})M(N^{j_v})M...(N^{j_w}))M^{<\beta_j>}$$

$$\Longrightarrow D_j \in Z_{m-1}\ .\ \blacksquare$$

5) Für $l,m\in\mathbb{N}$, sowie $M,N\in Mo$ und $\alpha,\alpha_i\in\mathbb{N}_o$ $(\forall i\in\underline{l})$ gilt:

$$(\forall i\in\underline{l}:\ \alpha_i<m) \Longrightarrow D:=(\prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\alpha_i>})N^{<\alpha>} - (\prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i})M^{<\alpha_i>})N^{<\alpha>}$$

$$\in C_{m-1} + Z_{m-1}\ .$$

BEW. durch Induktion über α: Für $\alpha=0$ siehe 4).

$\alpha-1 \longrightarrow \alpha$:

$$D = \prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\alpha_i>}\,\tau\,N^{<\alpha>} - N^{<\alpha>}\,\tau\,\prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i})M^{<\alpha_i>} -$$

$$\sum_{\beta\in\underline{\alpha-1}_o}\ \sum_{\substack{(\zeta_i+\eta_i=\alpha_i)_i\\ \beta+\sum\zeta_i=\alpha}} (N^{<\beta>}\cdot\prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i+1})^{<\zeta_i>}\cdot\prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\eta_i>} -$$

$$N^{<\beta>}\cdot\prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i+1})M^{<\zeta_i>}\cdot\prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i})M^{<\eta_i>})$$

$$\equiv \Big[\prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\alpha_i>}, N^{<\alpha>}\Big] +$$

Ind. Vor.

$$+ N^{<\alpha>}\,\tau\,(\prod_{i\in\underline{l}} M(N^{j_i})^{<\alpha_i>} - \prod_{i\in\underline{l}} (N^{j_i})M^{<\alpha_i>})$$

modulo $C_{m-1} + Z_{m-1}$.

Der erste Summand ist aus C_{m-1} nach 3), der zweite nach 4) aus Z_{m-1} . ■

22.2.3.DEF.: $I_m := C_m + Z_m$.

6) Für $l \in \mathbb{N}$ gilt mit $k,m \in \mathbb{N}_o$ und $M,N \in Mo$:

$$MN^{l\,\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k-m\rangle} - N^{l}M^{\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k-m\rangle} \equiv$$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i-1}\left((MN^{l+i-1\,\langle m\rangle} - N^{l+i-1}M^{\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k-m\rangle} + \left[N^{l+i-1}M^{\langle m\rangle}{}_{,N}^{\langle k-im\rangle}\right]\right) \bmod I_{m-1} .$$

BEW. durch Induktion über k: (o.E. m>0, sonst triv.)

k<m: Dann ist k<im $\forall i \in \mathbb{N}$, und beide Seiten der Kongruenz verschwinden identisch.

k=m: Dann ist k<im $\forall i>1$. Auf der rechten Seite bleibt nur

$$(MN^{l+1-1\,\langle m\rangle} - N^{l+1-1}M^{\langle m\rangle})\,\tau\,N^{\langle k-m\rangle} .$$

$m \leq k \longrightarrow k+1$: $MN^{l\,\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k+1-m\rangle} - N^{l}M^{\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k+1-m\rangle} =$

$$= MN^{l\,\langle m\rangle}{}_{\tau N}^{\langle k+1-m\rangle} - N^{\langle k+1-m\rangle}{}_{\tau\,N^{l}M^{\langle m\rangle}} -$$

$$(MN^{l+1\,\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k+1-2m\rangle} - N^{l+1}M^{\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle k+1-2m\rangle})$$

$$- \sum_{i\in\underline{m-1}} (MN^{l+1\,\langle i\rangle}{}_{MN^{l\,\langle m-i\rangle}}^{\langle k+1-m-i\rangle} - N^{l+1}M^{\langle i\rangle}{}_{N^{l}M^{\langle m-i\rangle}}^{\langle k+1-m-i\rangle})$$

$$\equiv \left[N^{l}M^{\langle m\rangle}{}_{,N}^{\langle k+1-m\rangle}\right] + (MN^{l\,\langle m\rangle} - N^{l}M^{\langle m\rangle})\,\tau\,N^{\langle k+1-m\rangle}$$

5)

$$- (MN^{l+1\,\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle (k+1-m)-m\rangle} - N^{l+1}M^{\langle m\rangle}{}_{N}^{\langle (k+1-m)-m\rangle}) \equiv$$

Ind.Vor.

$$\equiv \left[N^{l}M^{\langle m\rangle}{}_{,N}^{\langle k+1-m\rangle}\right] + (MN^{l\,\langle m\rangle} - N^{l}M^{\langle m\rangle})\,\tau\,N^{\langle k+1-m\rangle} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i \left((MN^{l+i}{}^{<m>} - N^{l+i}M^{<m>}) \tau N^{<k+1-m-im>} + \right.$$

$$\left. + [N^{l+i}M^{<m>}, N^{<k+1-m-im>}] \right)$$

$$= (MN^{l+1-1}{}^{<m>} - N^{l+1-1}M^{<m>}) \tau N^{<k+1-1m>} +$$

$$+ [N^{l+1-1}M^{<m>}, N^{<k+1-1m>}] +$$

$$+ \sum_{j>1} (-1)^{j-1} \left((MN^{l+j-1}{}^{<m>} - N^{l+j-1}M^{<m>}) \tau N^{<k+1-jm>} + \right.$$

$$\left. + [N^{l+j-1}M^{<m>}, N^{<k+1-jm>}] \right) \blacksquare$$

7) Für $m,k\in\mathbb{N}_o$ und $M,N\in Mo$ gilt: $[M^{<m>},N^{<k>}] \equiv$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i-1} \left((MN^{i}{}^{<m>} - N^{i}M^{<m>}) \tau N^{<k-im>} + \right.$$

$$\left. + [N^{i}M^{<m>}, N^{<k-im>}] \right) \qquad \mathrm{mod}\ I_{m-1} .$$

<u>BEW.:</u> $[M^{<m>},N^{<k>}] = MN^{<m>}N^{<k-m>} - NM^{<m>}N^{<k-m>} -$

$$\sum_{i\in\underline{m-1}} (MN^{<i>}N^{<k-i>} - NM^{<i>}N^{<k-i>}) \equiv$$

5)

$MN^{<m>}N^{<k-m>} - NM^{<m>}N^{<k-m>}$. Die Beh. folgt aus 6) $\blacksquare$

Entwickelt man in 7) die Kommutatoren nach dem gleichen Schema weiter, so erhält man:

8) Für $m,k\in\mathbb{N}_o$ und $M,N\in Mo$ gilt: $[M^{<m>},N^{<k>}] \equiv$

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{i_1,\ldots,i_l\in\mathbb{N}} (-1)^{i_1+\ldots+i_l-l} W(l,i_1,\ldots,i_l) \mod I_{m-1}$$

Dabei ist $W(l,i_1,\ldots,i_l) :=$

$$((N^{i_1+\ldots+i_{l-1}}M(N^{i_l}))^{<m>} - ((N^{i_1+\ldots+i_l}M)^{<m>}) \tau N^{<k-(i_1+\ldots+i_l)m>}$$

BEW. durch Induktion über k: Für k=0 oder m=0 ist die Aussage trivial. Induktionsschritt: $[M^{<m>},N^{<k>}] \equiv_{7)}$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i-1} \left(MN^{i\,<m>} - N^{i}M^{<m>} \right) \tau N^{<k-im>} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i-1} [N^{i}M^{<m>}, N^{<k-im>}] \equiv_{\text{Ind. Vor.}}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i-1} (MN^{i\,<m>} - N^{i}M^{<m>}) \tau N^{<k-im>} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i-1} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{i_1,\ldots,i_l\in\mathbb{N}} (-1)^{i_1+\ldots+i_l-l} \left((N^{i_1+\ldots+i_{l-1}}N^{i}M(N^{i_l})^{<m>} - \right.$$

$$\left. (N^{i_1+\ldots+i_l+i})^{<m>}M \right) \tau N^{<k-im-(i_1+\ldots+i_l)m>}$$

$$= \sum_{i_1\in\mathbb{N}} (-1)^{i_1-1} (M(N^{i_1})^{<m>} - (N^{i_1})^{<m>}M) \tau N^{<k-i_1m>} +$$

$$+ \sum_{j>1} \sum_{i_1,\ldots,i_j\in\mathbb{N}} (-1)^{i_1+\ldots+i_j-j} ((N^{i_1+\ldots+i_{j-1}})M(N^{i_j})^{<m>} -$$

$$(N^{i_1+\ldots+i_j})^{<m>}M) \tau N^{<k-(i_1+\ldots+i_j)m>} . \blacksquare$$

22.2.4.SATZ: $\forall m\in\mathbb{N}: \; I_m = C_m = Z_m$.

BEW. durch Induktion über m : m=0: $I_0 = J_0 = \{0\}$.

m-1 ⟶ m : Ist $\min\{i,j\} < m$, so gilt:

$[M^{<i>},N^{<j>}] \in C_{m-1} \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} I_{m-1} = Z_{m-1}$;

$[M^{<m>},N^{<l>}] \in I_{m-1}+Z_m \; \forall l$ nach 8) . Da nach Ind. Vor.

$I_{m-1}=Z_{m-1} \subset Z_m$ ist, folgt $C_m \subset Z_m$.

Umgekehrt ist für i<m $MN^{<i>} - NM^{<i>} \in Z_{m-1}=C_{m-1}$ nach Ind.Vor.

$MN^{<m>} - NM^{<m>} \overset{7)}{\equiv} [M^{<m>},N^{<m>}] \bmod I_{m-1}$. Da $[M^{<m>},N^{<m>}] \in C_m$ ist, folgt somit mit der Ind. Vor. :

$MN^{<m>} - NM^{<m>} \in C_{m-1} + C_m \subset C_m + C_m \subset C_m$. Somit ist $Z_m \subset C_m$. ■

22.2.5.KOR.: Das Kommutatorideal C von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ wird erzeugt von den Elementen $M^{<i>} - N^{<i>}$ mit $i \in \mathbb{N}$ und $M,N \in Mo$, für die gilt: M ist zyklische Permutation von N.

BEW.: $C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_o} C_m \underset{22.2.4.}{=} \bigcup_{m \in \mathbb{N}_o} Z_m$. ■

Bei der Bildung der Faktorkommutatoralgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ wird die Kommutativität also bereits durch die Forderung der zyklischen Vertauschbarkeit in den Argumenten der $(.)^{<i>}$ erzwungen.

22.2.6.BEM.: Betrachtet man $R\{X_k\}_k$ als $\mathbb{N}_o$- graduierte Algebra, so ist nach 13.2.9. $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ graduierte Algebra. 22.2.5. besagt dann, daß das Kommutatorideal homogen ist. $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist somit ebenfalls graduierte R-Algebra.

22.2.7.KOR.: $\forall f,g \in End(R^n)\ \forall i \in \underline{n}$:

$$\phi_{Dn}(f \circ g^{[i]} id^{[n-i]}) = \phi_D(f \circ g^{<i>}) = \phi_D(g \circ f^{<i>}) = \phi_{Dn}(g \circ f^{[i]} id^{[n-i]})$$

BEW.: Die Spezialisierung $X_1 \longmapsto f$, $X_2 \longmapsto g$, $X_k \longmapsto$ bel. für alle $k>2$ liefert einen R-Algebra-Hom. $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \hat{\Gamma}(End(R^n)) \xrightarrow{\phi_D} R$, der über $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ faktorisiert. Da $X_1X_2^{<i>} - X_2X_1^{<i>} \in C$ ist, muß deshalb $\phi_D(f \circ g^{<i>} - g \circ f^{<i>}) = 0$ sein . ■

Einen anderen Beweis (über unendlichen Körpern), daß die

Koeffizienten des char. Polynoms von f∘g gleich den Koeffizienten des char. Polynoms von g∘f sind findet man in [Wat 75]Th.1 .

22.2.8.BEM. 22.2.5. impliziert "in etwa", daß die Relationen $\phi_{Dn}(f\circ g^{[i]}id^{[n-i]}) = \phi_{Dn}(g\circ f^{[i]}id^{[n-i]})$ bereits alle diejenigen Relationen zwischen den Koeffizienten der char. Polynome von Produkten von Matrizen aus $M_n(R)$ erzeugen, die daher rühren, daß ϕ_D ein Algebra-Hom. in einen kommutativen Ring ist.

9) Für $l,m\in\mathbb{N}_o$, $i\in\underline{l}_o$ und $\alpha_j\in\mathbb{N}_o$ $(\forall j\in\underline{l})$ mit $|\alpha|>0$ gilt mit $M,N,L_j\in Mo$ $(\forall j\in\underline{l})$:

$L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_i^{<\alpha_i>}\tau(MN^{<m>}-NM^{<m>})\tau L_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>}\tau\ldots\tau L_l^{<\alpha_l>}$ ist mod I_{m-1} kongruent zu einer Linearkombination von Termen der Form

$$(DE^{<m>}-ED^{<m>})\tau L_1^{<\beta_1>}\tau\ldots\tau L_l^{<\beta_l>} \quad \text{mit}$$

$\beta_j\leq\alpha_j$ $\forall j\in\underline{l}$ und $D,E\in Mo$.

BEW.: $L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_i^{<\alpha_i>}\tau(MN^{<m>}-NM^{<m>}) =$

$= L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_{i-1}^{<\alpha_{i-1}>}\tau(MN^{<m>}-NM^{<m>})\tau L_i^{<\alpha_i>}$

$- L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_{i-1}^{<\alpha_{i-1}>}\tau[MN^{<m>},L_i^{<\alpha_i>}] +$

$+ L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_{i-1}^{<\alpha_{i-1}>}\tau[NM^{<m>},L_i^{<\alpha_i>}]$.

Nach 8) gilt: $L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_{i-1}^{<\alpha_{i-1}>}\tau[L^{<m>},L_i^{<\alpha_i>}] \equiv$

$$\sum_{r\in\mathbb{N}}\sum_{j_1,\ldots,j_r\in\mathbb{N}}(-1)^{|j|-r}(L_1^{<\alpha_1>}\tau\ldots\tau L_{i-1}^{<\alpha_{i-1}>}\tau((L_i^{j_1+\ldots+j_{r-1}})L(L_i^{j_r})^{<m>} - (L_i^{j_1+\ldots+j_r})L^{<m>})\tau L_i^{<\alpha_i-(j_1+\ldots+j_r)m>}) \bmod I_{m-1}$$

Die Behauptung folgt durch Induktion über i . ■

22.2.9.SATZ: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ ist das von den Elementen $MN^{<l>} - NM^{<l>}$ mit $l \leq m$ und $M,N \in Mo$ erzeugte Rechts-Ideal bereits ganz I_m . Insbesondere ist das Kommutatorideal das von den $MN^{<l>} - NM^{<l>}$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $M,N \in Mo$ aufgespannte Rechts-Ideal.

BEW.: I_m wird als R-Modul aufgespannt von I_{m-1} und Elementen der Form
$L_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau L_i^{<\alpha_i>} \tau (MN^{<m>} - NM^{<m>}) \tau L_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>} \tau \ldots \tau L_1^{<\alpha_1>}$. Die Beh. folgt also per Induktion aus 9). ■

10) Für $m,l \in \mathbb{N}_0$, $i \in \underline{l}_0$ und $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ $(\forall j \in \underline{l})$ mit $|\alpha| > 0$ gilt mit $M,N_j \in Mo$ $(\forall j \in \underline{l})$:

$M^{<m>} \tau N_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau N_1^{<\alpha_1>}$ ist mod I_{m-1} kongruent zu

$N_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau N_i^{<\alpha_i>} \tau M^{<m>} \tau N_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>} \tau \ldots \tau N_1^{<\alpha_1>}$ + Linearkomb. von Termen der Form $(DE^{<m>} - ED^{<m>}) \tau N_1^{<\beta_1>} \tau \ldots \tau N_1^{<\beta_1>}$ mit $\beta_j \leq \alpha_j$ $\forall j \in \underline{l}$ und $|\beta| < |\alpha|$.

BEW.: $N_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau N_i^{<\alpha_i>} \tau M^{<m>} \tau N_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>} \tau \ldots \tau N_1^{<\alpha_1>} =$

$= N_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau N_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>} \tau M^{<m>} \tau N_{i+2}^{<\alpha_{i+2}>} \tau \ldots \tau N_1^{<\alpha_1>} +$

$N_1^{<\alpha_1>} \tau \ldots \tau N_i^{<\alpha_i>} \tau \left[M^{<m>}, N_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>} \right] \tau N_{i+2}^{<\alpha_{i+2}>} \tau \ldots \tau N_1^{<\alpha_1>}$.

Entwickelt man $\left[M^{<m>}, N_{i+1}^{<\alpha_{i+1}>} \right]$ nach 8), so ist dabei $\beta_{i+1} := \alpha_{i+1} - (j_1 + \ldots + j_r)m < \alpha_{i+1}$. Die Behauptung folgt dann mit 9) durch Induktion nach i . ■

Zur weiteren Untersuchung des Kommutatorideals werden einige zusätzliche Überlegungen nötig.
Wegen der Relationen $M^{<i>} = N^{<i>}$ in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, falls N zyklische Permutation von M ist, kann man sich ein Element M aus Mo auch vorstellen als reguläres $|M|$-Eck (indem man Anfang und Ende des Monoms zusammenfügt), dessen Ecken entsprechend den verschiedenen in M auftretenden Variablen X_k eingefärbt sind. Für Betrachtungen in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ kann man den Verknüpfungspunkt vergessen. Ist M zyklisch (21.1.19.), etwa $M=N^1$, so heißt dies, daß eine Drehung um $|N|\frac{360°}{|M|}$ das $n=|M|$- Eck invariant läßt, und 1 mal diese Drehung gerade eine 360° Drehung ergibt.
Irgendeine zyklische Vertauschung M' des Monoms M liefert das gleiche $|M|$-Eck. Betrachtet man die ersten $|N|$ Elemente von M' , die das Monom N' bilden, so findet man, daß N' zyklische Permutation von N sein muß. Durch 1-maliges Drehen um $|N|\frac{360°}{|M|}$, wobei ja jedesmal das n-Eck invariant bleibt, sieht man, daß $M'=N'^1$ sein muß.
Dies noch einmal genauer.

22.2.10.LEMMA: Für $l\in\mathbb{N}$ und $M,N\in Mo$ mit $M=N^l$ gilt:
1) Ist M' zyklische Permutation von M, so existiert genau eine zyklische Permutation N' von N mit $M'=N'^l$.
2) Ist M' zyklische Permutation von M und gilt $M'=N'^l$ mit $N'\in Mo$, so ist N' zyklische Permutation von N.

BEW.: 1) Die Eindeutigkeit ist klar.
$i:=|M|$, $j:=|N| \Rightarrow i=j\cdot l$. Ist M' zyklische Permutation von M so gibt es ein $k\in\underline{i}$ und Elemente $L',L''\in Mo\cup\{1_R\}$, so daß

$k=|L'|$ ist, $M=L'L''$ und $M'=L''L'$. Für $k=qj+r$ mit $r,q\in\mathbb{N}_o$ und $r<j$ folgt aus $M=N^1$: $\exists Q',Q''\in M\circ\cup\{1_r\}$ mit $|Q'|=r$, $N=Q'Q''$, $L'=N^qQ'$ und $L''=Q''N^{1-q-1}$. $M'=L'L''=Q''N^{1-q-1}N^qQ' =$ $=Q''(Q'Q'')^{1-1}Q' = (Q''Q')^1 = N'^1$ mit $N':=Q''Q'$ zykl. Permutation von N.

2) $M'=N'^1 \Rightarrow 1\cdot|N'| = |M'| = |M| = 1\cdot|N| \Rightarrow |N'| = |N|$.

Nach 1) ist $M'=Q^1$ mit Q zyklischer Perm. von N.

$|Q| = |N| = |N'|$, $Q^1 = N'^1 \Rightarrow Q = N'$ und N' ist zyklische Permutation von N. ■

22.2.11.KOR.: $M\in\Omega$ (21.1.19), N zykl. Perm. von N $\Rightarrow$ $N\in\Omega$

BEW.: Annahme: $N=Q^1$. Dann ist nach 22.2.10.1) $M=L^1$ mit einer zyklischen Permutation L von Q. Widerspruch. ■

11) Jedes Element aus I_m ($m\in\mathbb{N}_o$ bel., fest) ist Linearkomb. von Elementen der Form

$$(\tau_{M\in_N\Omega}(\tau_{i\in\mathbb{N}} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}}))\tau N^{k<l>}\tau(\tau_{i\in\mathbb{N}} N^{<i>\tau\alpha_{Ni}})\tau(\tau_{M\in\Omega_N}(\tau_{i\in\mathbb{N}} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}})) -$$

$$(\tau_{M\in_L\Omega}(\tau_{i\in\mathbb{N}} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}}))\tau L^{k<l>}\tau(\tau_{i\in\mathbb{N}} L^{<i>\tau\alpha_{Li}})\tau(\tau_{M\in\Omega_L}(\tau_{i\in\mathbb{N}} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}})) \quad \text{mit}$$

$N,L\in\Omega$ wobei L zyklische Permutation von N ist, und $k,l\in\mathbb{N}_o$ mit $l\in m$ sowie $\alpha_{Mi}\in\mathbb{N}_o$ mit $\sum_{M,i}\alpha_{Mi}<\infty$.

Dabei ist für D , bei fester Ordnung auf Ω,

$\underline{\underline{{}_D\Omega}}:=\{M\in\Omega|M<D\}$ und $\underline{\underline{\Omega_D}}:=\{M\in\Omega|M>D\}$.

BEW. durch Induktion über m: Der Fall m=0 ist klar, da

$I_m=\{0\}$ ist und $N^{k<l>} = 1_R = L^{k<l>}$ für $l\leq 0$.

m ——>m+1: Nach 22.2.9. und 21.1.20. ist jedes Element aus I_{m+1} Linearkombination von Elementen aus I_m sowie solchen der Form

$$X:=(MN^{<m+1>}-NM^{<m+1>})\tau(\underset{M\in\Omega}{\tau}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}M^{<i>\tau\alpha_{mi}})) \text{ mit}$$

$\sum_{M,i}\alpha_{Mi}<\infty$ und $M,N\in Mo$.

Zeige: X läßt sich mod I_m als Linearkombination von Elementen der behaupteten Form darstellen.

Beweis durch Induktion über $k:=\sum_{M,i}\alpha_{Mi}<\infty$:

k=0: Es sei $MN=L^{l}$ mit $(L,l)\in Mo\times\mathbb{N}$, so daß l maximal ist. Nach 22.2.10. existiert eine zyklische Permutation L' von L, so daß $NM=L'^{l}$ ist. $(L^{l})^{<m+1>}-(L'^{l})^{<m+1>}$ bringt aber X auf die verlangte Form.

k ——>k+1: Sei wieder $l\in\mathbb{N}$ maximal mit $MN=L^{l}$. Weiter sei $NM=L'^{l}$ mit einer zyklischen Permutation L' von L. Nach 10) ist dann X mod I_m kongruent zu

$$\underset{M\in_L\Omega}{\tau}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}M^{<i>\tau\alpha_{Mi}})\tau L^{l^{<m+1>}}\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}(\tau L^{<i>\tau\alpha_{Li}})\tau(\underset{M\in\Omega_L}{\tau}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}M^{<i>\tau\alpha_{Mi}}))\ -$$

$$(\underset{M\in_{L'},\Omega}{\tau}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}M^{<i>\tau\alpha_{Mi}}))\tau L'^{l^{<m+1>}}\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}(\tau L'^{<i>\tau\alpha_{L'i}})\tau(\underset{M\in\Omega_{L'}}{\tau}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}M^{<i>\tau\alpha_{Mi}}))\ +$$

+ Linearkombination von Termen der Form

$$(DE^{<m+1>}-ED^{<m+1>})\tau(\underset{M\in\Omega}{\tau}(\underset{i\in\mathbb{N}}{\tau}M^{<i>\tau\beta_{Mi}})) \text{ mit } \sum_{M,i}\beta_{Mi}<\sum_{M,i}\alpha_{Mi}\ .$$

Diese letzten Terme haben aber nach Ind.Vor. für k mod I_m die behauptete Form.

Schließlich haben nach Ind.Vor. für m auch die Elemente von I_m die behauptete Form und 11) ist bewiesen. ■

Ist $X^{k^{<l>}} = \sum_{\beta} a_\beta \prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} X^{<i>^{\tau\beta_i}}$ die Basisdarstellung (bzgl. der $e(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$) von $X^{k^{<l>}}$ in $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$, so folgt nach Spezialisierung $X \longmapsto N$ einerseits bzw $X \longmapsto L$ andererseits:

$$N^{k^{<l>}} = \sum_{\beta} a_\beta \prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau\beta_i}} \quad \text{bzw.} \quad L^{k^{<l>}} = \sum_{\beta} a_\beta \prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} L^{<i>^{\tau\beta_i}} .$$

Es folgt dann:

$$N^{k^{<l>}}\,\tau(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau\alpha_{Ni}}}) = \sum_{\beta} a_\beta \,(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau(\alpha_{Ni}+\beta_i)}}) \qquad \text{bzw.}$$

$$L^{k^{<l>}}\,\tau(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} L^{<i>^{\tau\alpha_{Li}}}) = \sum_{\beta} a_\beta \,(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} L^{<i>^{\tau(\alpha_{Li}+\beta_i)}}) .$$

Damit ergibt sich aus 11) die eine Richtung von

22.2.11.SATZ: Das Kommutatorideal C ist der R-Untermodul von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, der erzeugt wird von den Elementen

$$(\prod_{M\in_N\Omega}{}^{\tau}(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} M^{<i>^{\tau\alpha_{Mi}}}))\,\tau(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau(\alpha_{Ni}+\alpha_i)}})\,\tau(\prod_{M\in\Omega_N}{}^{\tau}(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} M^{<i>^{\tau\alpha_{Mi}}})) \;-$$

$$(\prod_{M\in_L\Omega}{}^{\tau}(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} M^{<i>^{\tau\alpha_{Mi}}}))\,\tau(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} L^{<i>^{\tau(\alpha_{Li}+\alpha_i)}})\,\tau(\prod_{M\in\Omega_L}{}^{\tau}(\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} M^{<i>^{\tau\alpha_{Mi}}})) \quad \text{für die}$$

gilt: $M,N,L\in Mo$, L echte zyklische Permutation von N,

$\sum_i((\sum_M \alpha_{Mi})+\alpha_i) < \infty$. ($_D\Omega$, Ω_D wie in 11)).

BEW.: 1) Nach obigen überlegungen zu 11) liegt C in der linearen Hülle der angegebenen Elemente.

2) Zeige: Jedes der angegebenen Elemente liegt in C.

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau(\alpha_{Ni}+\alpha_i)}} = (\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau\alpha_i}})\,\tau\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\tau} N^{<i>^{\tau\alpha_{Ni}}} \quad \text{(analog für L).}$$

Jedes der betrachteten Elemente hat also die Form

$y_1 \tau y_2 \tau z \tau y_3 - y_1 \tau z' \tau y_2 \tau y_3$ mit

$$z - z' = \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} N^{<i>\tau\alpha_i} - \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} L^{<i>\tau\alpha_i} \quad .$$

In jeder R-Algebra gilt:

$a_1 \ldots a_k - b_1 \ldots b_k = (a_1 - b_1)a_2 \ldots a_k + b_1(a_2 \ldots a_k - b_2 \ldots b_k)$.
Ist also für jedes i $a_i - b_i$ aus einem gegebenen Ideal I, so folgt induktiv, daß auch $a_1 \ldots a_k - b_1 \ldots b_k$ aus I ist.
Da $N^{<i>} - L^{<i>} \in C$ gilt, reicht es also, die Aussage

$z - z' \in C \Longrightarrow y_1 \tau y_2 \tau z \tau y_3 - y_1 \tau z' \tau y_2 \tau y_3 \in C$ zu zeigen.

$y_1 \tau y_2 \tau z \tau y_3 = y_1 \tau z \tau y_2 \tau y_3 + y_1 \tau [y_2, z] \tau y_3$.
Da $y_1 \tau [y_2, z] \tau y_3 \in C$ ist, folgt die Behauptung. ■

Auf Mo×Mo bezeichne "M∿N" die Relation "M ist zyklische Permutation von N". Man kann annehmen, daß alle Elemente, die zueinander in dieser Relation stehen, in einer geeigneten Ordnung auf Ω beieinander liegen.

22.2.12.DEF.: Mit $\overline{\Omega}$ sei ein Repräsentantensystem der Restklassen von Ω bzgl. der Äquivalenzrelation "∿" bezeichnet.

22.2.13.DEF.: b_α bezeichne das Basiselement

$$b_\alpha := \underset{M\in\Omega}{\tau} \underset{i\in\mathbb{N}}{\tau} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}} \quad \text{von } \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \ .$$

$$0 \leq ht(b_\alpha) := |\{M\in\Omega \mid M\notin\overline{\Omega} \wedge \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{Mi} \neq 0\}| < \infty \quad .$$

B bezeichne die Menge der Elemente $b_\alpha - b_\beta \neq 0$ für die $N, L \in Mo$ existieren mit $N \neq L$ und i) L ist zyklische Permutation von N ii) $\forall i\in\mathbb{N} : \alpha_{Ni} + \alpha_{Li} = \beta_{Ni} + \beta_{Li}$; iii) $\forall i\in\mathbb{N}\ \forall Mo \ni M \neq N, L : \alpha_{Mi} = \beta_{Mi}$.

12) C wird als R-Modul erzeugt von den Elementen $b_\alpha - b_\beta \in B$ mit $ht(b_\alpha)+1 = ht(b_\beta)$.

BEW.: Nach 22.2.11. erzeugen die Elemente von B ganz C. Annahme: $b_\alpha - b_\beta \in B$ und $ht(b_\alpha)=ht(b_\beta)$.

$$ht(b_\alpha)=ht(b_\beta) \iff \begin{cases} \text{a) } \sum_i \alpha_{Ni} \neq 0 \iff \sum_i \beta_{Ni} \neq 0 & \text{für } N \notin \overline{\Omega} \\ \text{b) } \sum_i \alpha_{Li} \neq 0 \iff \sum_i \beta_{Li} \neq 0 & \text{für } L \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

(N,L wie in der Def. von B (22.2.13.))

Wegen i) in der Def. von B und der Def. von $\overline{\Omega}$ können nicht sowohl N als auch L in $\overline{\Omega}$ liegen. O.E. sei daher $N \notin \overline{\Omega}$.

b_γ sei definiert durch

$$\gamma_{Mi} := \begin{cases} \alpha_{Mi}=\beta_{Mi} & \text{für } M \neq N,L \\ 0 & \text{für } M=N \\ \alpha_{Ni}+\alpha_{Li}=\beta_{Ni}+\beta_{Li} & \text{für } M=L \end{cases}$$

Damit sind $b_\gamma - b_\beta$ und $b_\gamma - b_\alpha$ in B. Aus $b_\alpha - b_\beta = (b_\gamma - b_\beta) - (b_\gamma - b_\alpha)$ folgt, daß C bereits von den $b_\alpha - b_\beta \in B$ mit $ht(b_\alpha) \neq ht(b_\beta)$ erzeugt wird. Die Behauptung folgt, da mit $b_\alpha - b_\beta$ auch $b_\beta - b_\alpha$ in B liegt, und für $b_\alpha - b_\beta \in B$ sich $ht(b_\alpha)$ und $ht(b_\beta)$ höchstens um Eins unterscheiden. ■

13) Definiert man $B_i := \{b_\alpha - b_\beta \in B \mid ht(b_\alpha)+1=ht(b_\beta) \leq i\}$, so existiert zu jedem b_β mit $i:=ht(b_\beta) \geq 1$ ein b_α, daß folgende Bedingungen erfüllt: a) $ht(b_\alpha) = ht(b_\beta)-1$

b) $b_\alpha - b_\beta \in B_i$.

BEW.: Ist $N \in \Omega$, $N \notin \overline{\Omega}$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_{Ni} \neq 0$, und ist $L \in \overline{\Omega}$ mit $N \sim L$, so wird durch

$$\alpha_{Mi} := \begin{cases} \beta_{Mi} & \text{für } M \neq N,L \\ \beta_{Li}+\beta_{Ni} & \text{für } M=L \\ 0 & \text{für } M=N \end{cases}$$

das gesuchte Element b_α definiert. ■

b_α aus 13) ist natürlich nicht eindeutig. Der Vorgang kann jedoch wiederholt werden und liefert dann eine Folge

b_β, $b_\alpha = b_{\alpha_1}$, $b_{\alpha_2}, \ldots, b_{\alpha_i}$ $(i = ht(b_\beta))$ mit

i) $ht(b_{\alpha_j}) = i-j$ und ii) $b_{\alpha_{j+1}} - b_{\alpha_j} \in B_{i-j}$.

Das Element b_{α_i} ist jedoch nur von b_β und nicht von der speziellen Folge abhängig, denn induktiv ergibt sich :

$\forall j \in \underline{i}$: $\sum\limits_{N \cap M} \gamma_{Ni} = \sum\limits_{N \cap M} \beta_{Ni}$ $\forall M \in \overline{\Omega}$, wobei jetzt $b_\gamma := b_{\alpha_j}$ ist.

Damit ist $b_{\alpha_i} = \sum\limits_{M \in \overline{\Omega}} \sum\limits_{l \in \mathbb{N}} M^{<l>}{}^{\tau(\sum_{N \cap M} \beta_{Nl})}$.

22.2.14.SATZ: Wählt man zu jedem Basiselement b_β von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ mit $ht(b_\beta) \geq 1$ ein weiteres Basiselement b_α fest aus, so daß $b_\alpha - b_\beta \in B_{ht(b_\beta)}$ ist, dann erhält man, wenn man $b_{(\beta)} - b_\beta$ statt $b_\alpha - b_\beta$ schreibt, folgende Aussage:
Das Kommutatorideal C von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist ein freier R-Modul mit Basis $\{b_{(\beta)} - b_\beta \mid |\beta| < \infty,\ ht(b_\beta) \geq 1\}$.

BEW.: Sind $b_\alpha - b_\beta$, $b_{\alpha'} - b_\beta \in B_1$, so folgt nach den obigen Überlegungen $b_\alpha = b_{\alpha'}$ und damit $b_\alpha - b_\beta = b_{(\beta)} - b_\beta$.
Ist $b_\alpha - b_\beta \in B_i$ mit $i = ht(b_\beta) > 1$, so konstruiert man wie oben eine Folge $b_\alpha = b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \ldots, b_{\alpha_i}$ mit $ht(b_{\alpha_j}) = i-j$.
Ebenso konstruiert man zu $b_{(\beta)} - b_\beta$: $b_{(\beta)} = b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2}, \ldots, b_{\gamma_i}$.
Wegen $b_{\alpha_i} = b_{\gamma_i}$ hat man: $(b_{\alpha_i} - b_{\alpha_{i-1}}) + (b_{\alpha_{i-1}} - b_{\alpha_{i-2}}) + \ldots +$

$+ (b_{\alpha_1} - b_\beta) = (b_{\alpha_i} - b_\beta) = (b_{\gamma_i} - b_\beta) = (b_{\gamma_i} - b_{\gamma_{i-1}}) + (b_{\gamma_{i-1}} - b_{\gamma_{i-2}}) +$

$....+(b_{\gamma_1}-b_\beta)$. Damit ergibt sich: $(b_\alpha-b_\beta)=(b_{(\beta)}-b_\beta)+$

$+(b_{\gamma_2}-b_{\gamma_1})+...+(b_{\gamma_i}-b_{\gamma_{i-1}})-(b_{\alpha_2}-b_{\alpha_1})-(b_{\alpha_3}-b_{\alpha_2})-...-(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_{i-1}})$

Wegen $b_{\gamma_{j+1}}-b_{\gamma_j} \in B_{i-j} \ni b_{\alpha_{j+1}}-b_{\alpha_j}$ folgt induktiv, daß die

$b_{(\beta)}-b_\beta$ ein Erzeugenden-System bilden.

Die lineare Unabhängigkeit ergibt sich aus dem folgenden Satz. ■

22.2.15.SATZ: Die Menge $\{ b_{(\beta)}-b_\beta \mid |\beta| < \infty \text{ , } ht(b_\beta)\geq 1 \} \cup \{b_\beta \mid |\beta| < \infty, ht(b_\beta)=0\}$ ist eine Basis von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$. C ist R-direkter Summand.

BEW.: $B':=\{b_\beta \mid |\beta| < \infty\}$ ist Basis von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ (21.1.20.). Definiere $F\in End(\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+))$ durch

$$F(b_\beta) := \begin{cases} b_\beta & \text{falls } ht(b_\beta)=0 \\ -(b_{(\beta)}-b_\beta) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wohlordnet man B' so, daß $b_\alpha<b_\beta$ ist, falls $ht(b_\alpha)<ht(b_\beta)$ gilt, so folgt die Beh. aus A.I.1. . ■

22.2.16.SATZ: $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ ist freier R-Modul mit Basis

$$\overline{B} := \{ \tau_{M\in\overline{\Omega}} \; \tau \; \kappa(M^{<i>})^{\tau\alpha_{Mi}} \mid \sum_{M,i} \alpha_{Mi} < \infty \} \text{ . } (\kappa \text{ wie in 22.1.2.})$$

BEW.: $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \cong C \oplus [\overline{B}]$ nach 22.2.15..

$\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) = Im(\kappa) \cong \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_C \cong [\overline{B}]$. ■

22.2.17.KOR.: $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \cong \bigotimes_{M\in\overline{\Omega}} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$ als R-Algebra.

BEW.: $F: \overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \longrightarrow \bigotimes_{M\in\overline{\Omega}} \hat{\Gamma}(R[X_M]^+)$ mit

$\kappa(\tau_{M\in\overline{\Omega}}(\tau_{i\in\mathbb{N}} M^{<i>\tau\alpha_{Mi}})) \longrightarrow \bigotimes_{M\in\overline{\Omega}}(\tau_{i\in\mathbb{N}} X_M^{<i>\tau\alpha_{Mi}})$ ist R-Modul-Iso.,

da Basis auf Basis abgebildet wird.

$F((\tau_{M\in\overline{\Omega}}\tau_{i\in\mathbb{N}}\kappa(M^{<i>})^{\tau\alpha_{Mi}})\tau(\tau_{m\in\overline{\Omega}}\tau_{i\in\mathbb{N}}\kappa(M^{<i>})^{\tau\beta_{Mi}})) =$
$\overline{\Gamma}$ kommut.

$F(\tau_{M\in\overline{\Omega}}\tau_{i\in\mathbb{N}}\kappa(M^{<i>})^{\tau(\alpha_{Mi}+\beta_{Mi})}) = \bigotimes_{M\in\overline{\Omega}}(\tau_{i\in\mathbb{N}} X_M^{<i>\tau(\alpha_{Mi}+\beta_{Mi})}) =$

$= \bigotimes_{M\in\overline{\Omega}}((\tau_{i\in\mathbb{N}} X_M^{<i>\tau\alpha_{Mi}})\tau(\tau_{i\in\mathbb{N}} X_M^{<i>\tau\beta_{Mi}}))$.

Da die Eins auf die Eins geht, ist F also sogar R-Algebra-Homomorphismus. ■

22.2.18.KOR.: $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+) \cong R[X_M^{<i>}]_{M\in\overline{\Omega},\ i\in\mathbb{N}}$ als R-Algebra.

BEW.: Folgerung aus 16.1.5. . ■

Wegen 22.2.17. ist es natürlich möglich, die diversen Basen von $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ zu Basen von $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ zu kombinieren. Auf eine Aufzählung soll hier verzichtet werden.

22.3. Zum Abschluß dieses Kapitels soll noch einmal auf die Menge $\Omega\subset Mo$ und auf $\overline{\Omega}$ eingegangen werden.

22.3.1.LEMMA: $\forall M',M''\in Mo$: (*) $M'M'' = M''M' = M \Longrightarrow$
$\exists N\in Mo$: $M' = N^i \wedge M'' = N^j$ mit $i,j\in\mathbb{N}$ geeignet.

BEW. durch Induktion nach $\max\{|M'|,|M''|\}$:
Ind: Anf.: $|M'|=|M''|=1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} M' = M'' =: N$.

Ind.Schluß:a) $|M'|=|M''| \xrightarrow{(*)} M'=M''=:N$.

b)O.E. $|M'|<|M''|$, also $\max\{|M'|,|M''|\}=|M''|$. $\xrightarrow[|M'|<|M''|]{(*)}$

$\exists M''' \in Mo : |M'''| < |M''| \wedge M'' = M'M''' . \xrightarrow{(*)}$

$M'M'M''' = M'M''' M' \Longrightarrow M'M''' = M''' M'$.

Da $\max\{|M'|,|M'''|\} < |M''|$ ist, ergibt sich nach Ind.Vor.:

$\exists N \in Mo : M' = N^i \wedge M''' = N^j \Longrightarrow M'' = M'M''' = N^{i+j}$. ■

22.3.2.FOLGERUNG: $M \in \Omega \Longleftrightarrow \forall$ echten zyklischen Perm. L von M : $M \neq L$ ■

Dies mag als eine Rechtfertigung der Bezeichnung "azyklisch" für die Elemente von Ω dienen (vgl.21.1.19.).

BEW.: "$\Longrightarrow$" Ist M=L für eine echte zyklische Permutation L von M, so folgt aus 22.3.1.: $M=M'M''=N^{i+j}$ im Widerspruch dazu, daß $M \in \Omega$ ist (i+j>1!).

"$\Longleftarrow$" $M \notin \Omega \Longrightarrow M = N^k$ mit $k>1 \Longrightarrow M=N^1N^{k-1}=N^{k-1}N^1$ echte zyklische Permutation von M. ■

Stellt man sich $M \in Mo$ wieder als regelmäßiges n-Eck vor, so hat man also jetzt nicht nur, daß für $M \in \Omega$ gewisse Drehungen M nicht invariant lassen, sondern weiß sogar, daß die Elemente von Ω dadurch gekennzeichnet sind, daß keine Drehung ($\neq k \cdot 360°$) M invariant läßt.

$\overline{\Omega}$ ist nach Definition ein beliebiges aber festes Repräsentantensystem von Ω bzgl. zyklischer Vertauschung.
Ein spezielles solches Repräsentantensystem wird in [Rad 79] in einem Zusammenhang untersucht, der nicht ohne Bezug ist

zu den Betrachtungen in dieser Arbeit. In [Rad 79] wird nämlich eine Basis für die Shuffle-Algebra über einem Vektorraum gesucht, die der Multiplikation angepaßt ist. Wie in Kap. 6 bemerkt wurde, kann man die Algebra der dividierten Potenzen (übliche Algebra-Struktur!) unter geeigneten Vorraussetzungen als Subalgebra der Shuffle-Algebra betrachten.

Schreibe $\underline{\underline{(X)}}$ für $Mo \cup \{1_R\}$. (X) ist das von den X_k erzeugte freie Monoid. Nur für den Rest dieses Kapitels tritt $\underline{\underline{<}}$ bzw. $\underline{\underline{\leq}}$ im Sinne der folgenden Ordnung auf Mo auf:

Ord: ([Rad 79] 2.1.1.a)

$a := X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k} < X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_l} =: b \quad :\Longleftrightarrow$

Endweder $\exists \mathbb{N} \ni u \leq \min\{k,l\}: X_{i_u} < X_{j_u} \wedge \forall r \in \underline{u-1}: X_{i_r} = X_{j_r}$

oder $\exists a' \in Mo: a = ba'$

22.3.3.DEF.: ([Rad 79]) $p \in (X)$ heißt "prim" $\Longleftrightarrow$

$\forall a,a',a'' \in Mo : (p = a'a'' \Longrightarrow p > a'')$.

22.3.4.LEMMA: $Mo \ni p$ prim $\Longrightarrow$ p azyklisch $(p \in \Omega)$.

BEW.: Annahme: $p = a^1$ $(1>1)$. Dann ist $p<a$ nach Ord (2.Teil). Da p prim ist, liefert dies einen Widerspruch. ■

Bezeichnet man die Menge aller primen Elemente von Mo mit $\underline{\underline{P}}$, so gilt also $P \subset \Omega$.
Wie das Beispiel $X_1 X_2 \in \Omega$ zeigt, gilt die Umkehrung nicht.

22.3.5.SATZ: ([Rad 79] 2.1.3.e.) $p', p'' \in P \wedge p' > p'' \Longrightarrow p'p'' \in P$.■

22.3.6.SATZ: ([Rad 79]2.1.4.;2.1.5.)

a) Jedes Element $a \in Mo$ hat eine eindeutige Primzerlegung

b) $a=p_1 \ldots p_r$ $(p_i \in P)$ ist die Primzerlegung von a genau dann, wenn gilt $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$.

c) Ist $a=q_1 \ldots q_s \in Mo$, $q_i \in P$, dann hat die Primzerlegung von a die Form $a=p_1 \ldots p_r$ mit $p_1=q_1 \ldots q_{i_1}$, $p_2=q_{i_1+1} \ldots q_{i_2}$, $\ldots$ $p_r=q_{i_{r-1}+1} \ldots q_s$ für $0=i_0<i_1<\ldots<i_r=s$ geeignet. ■

BEM.: Man kann Satz 22.3.6.b) als Def. von "Primzerlegung" nehmen; die eigentliche Def. fordert die Minimalität der Anzahl der Primfaktoren.

Sei $a=p_1 \ldots p_r$ die Primzerlegung eines Elements $a \in \Omega$ mit $r>1$. Dann kann man zyklisch vertauschen und erhält $a' := q_1 p_2 \ldots p_{r-1}$ mit $q_1 := p_r p_1 \in P$ nach 22.3.5., da nach 22.3.6.b) $p_r > p_1$ $(a \in \Omega)$. Nach 22.3.6.c) hat die Primzerlegung von a' hoechstens r-1 Faktoren. Induktiv erhält man:

22.3.7.LEMMA: Jedes $a \in \Omega$ ist modulo zyklischer Vertauschung zu einem $a' \in P$ kongruent. ■

22.3.8.SATZ: Man kann $\overline{\Omega}$ gleich P wählen. Die Menge P der primen Elemente ist also ein Repräsentantensystem von Ω bzgl. zyklischer Permutation.

BEW.: Es bleibt zu zeigen, daß eine zyklische Permutation p' eines Elements $p \in P$ nicht prim ist.

Für $a,a' \in Mo$ sei $p=a'a''$, $p'=a''a'$. p prim $\Rightarrow$ $p > a''$ (*).

$p=X_{i_1} \ldots X_{i_r} \xrightarrow{(*)} X_{i_1} \ldots X_{i_{a''}}$ ist größer als a" in der

lexikographischen Ordnung. Damit ist p>p'. Wäre nun p' ebenfalls prim, so könnte man umgekehrt genauso schließen, daß p'<p ist. Widerspruch! ■

22.3.9.:KOR. zum Bew.: Ist $a \in \Omega$, so ist in der Menge der zyklischen Permutationen von a genau das lexikographisch größte Element prim. ■

22.3.10.BEM.: Da bei zyklischen Permutationen alle Elemente gleiche Länge haben, stimmen ">" im Sinne von Ord und lexikographisches ">" überein.

22.3.11.BEM.: In dem neu erschienenen Buch [Lot 83] werden die "azyklischen" Elemente von Ω "primitiv" genannt (1.3.). Die "primen" Elemente von [Rad 79] heißen dort "Lyndon Worte" (5.1) (vgl. 22.3.9.). In der üblichen lexikographischen Ordnung werden dort zu [Rad 79] völlig analoge Ergebnisse entwickelt, wie etwa 22.3.6.a) und Analoga zu Def. 22.3.3. und 22.3.6.b).

KAPITEL 23 : Kommutative polynomiale Identitäten für $M_n(R)$

I.Einführung.

In diesem Kapitel wird der in 22.1.10. schon angeklungene Zusammenhang zu den"Spuridentitäten" in [Pro 76] hergestellt.

23.1. A sei zunächst eine beliebige aber feste R-Algebra. Für eine Indexmenge K wird durch

$\underline{\underline{\pi(i)}}$: $\Gamma(\bigoplus_{k\in K} A_k) \xrightarrow{\Gamma(pr_i)} \Gamma(A_i) \xrightarrow{\pi_1} A_i$, wobei $A_k := A\ \forall k\in K$

und $pr_i: \bigoplus_{k\in K} A_k \longrightarrow A_i$ die kan. Projektion ist, für jedes $i\in K$ ein Element aus $Hom(\Gamma(A^{(K)}),A)$ definiert.

23.1.1.DEF.: $\underline{\underline{PI}}$: $R\{X_k\}_{k\in K} \longrightarrow (Hom(\Gamma(A^{(K)}),A),*)$ sei der durch $X_k \longmapsto \pi(k)$ definierte R-Algebra-Hom.

Wie sieht das Bild PI(M) eines Monoms $M=M(X_k)_k=X_{k_1}\dots X_{k_l}\in M_0$ aus ?

$$PI(M)(\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_j]}) =$$

$$= \sum_{(\alpha_{ji})\in M((\alpha_j)_j;(1,\dots,1))} \pi(k_1)(\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_{j1}]})\dots\pi(k_l)(\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_{jl}]}) =$$

$$= \sum_{(\alpha_{ji})\in M((\alpha_j)_j;(1,\dots,1))} \mu_{l-1}\circ(pr_{k_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}pr_{k_l})(\bigotimes_{i\in\underline{l}}\bigotimes_j (a_{jk})_k^{\otimes\alpha_{ji}}) \quad \begin{matrix}5.3.1.\\=\\5.3.6.\end{matrix}$$

$$= \sum_{\sigma\in K_l((\alpha_j)_j)} \mu_{l-1}\circ(pr_{k_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}pr_{k_l})(\bar{\sigma}(\bigotimes_j (a_{jk})_k^{\otimes\alpha_j})) \quad .$$

Mit $\underline{\underline{(b_{rk})_k}} := (a_{jk})_k$ falls $\sum_{s<j}\alpha_s < r \leq \sum_{s\leq j}\alpha_s$ ergibt sich für $\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_j]} \in \Gamma(A^{(K)})$:

$$\underline{23.1.3.}\quad PI(X_{k_1}\dots X_{k_l})(\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_j]}) =$$

$$= \sum_{\sigma\in K_l((\alpha_j)_j)} b_{\sigma^{-1}(1)k_1}\, b_{\sigma^{-1}(2)k_2}\cdots b_{\sigma^{-1}(l)k_l}$$

($K_l((\alpha_j)_j)=\emptyset$ falls $\sum_j \alpha_j \neq l$ nach Konvention.)

23.1.3. $PI(X_{k_1}\ldots X_{k_1}) \in \mathrm{Hom}(\Gamma_1(A^{(K)}),A)$ nach 23.1.3..

$P=P(X_k)_k=\sum_j r_j M_j$ sei ein Polynom aus $R\{X_k\}_k$ ($r_j\in R$, $M_j=M_j(X_k)_k \in Mo$). Welches Polynomgesetz von $A^{(K)}$ nach A gehört zu PI(P) ? Für $(a_k)_k\in A^{(K)}$ ergibt sich:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_o} PI(P)((a_k)_k^{[i]}) = \sum_{i\in\mathbb{N}_o}\sum_j r_j\, PI(M_j)((a_k)_k^{[i]}) \overset{23.1.3.}{=}$$

$$= \sum_j r_j\, PI(M_j)((a_k)_k^{[grd(M_j)]}).$$ Setzt man in 23.1.2. $b_{rk}=a_k$ für alle r,k, so erhält man wegen $K_1((1)) = \{id\}$:

23.1.4. $$\sum_{i\in\mathbb{N}_o} PI(P)((a_k)_k^{[i]}) = \sum_j r_j\, M_j(a_k)_k = P(a_k)_k .$$

In P wird also a_k für X_k eingesetzt ($\forall k$). Daraus resultiert:

23.1.5.SATZ: a) Ist $P\in R\{X_k\}_k$ im Kern von PI, so ist P eine Polynomidentität für A (vgl. 23.1.7.).

b) Ist R ein unendlicher Körper, so ist Kern(PI) genau die Menge der Polynomidentitäten für A.

BEW.:a) Ist $PI(P)\equiv 0$, so ist insbesondere auch das zugehörige Polynomgesetz gleich 0, und die Beh. folgt aus 23.1.4..

b) Ist P Polynomidentität, so heißt das nach 23.1.4., daß das zu PI(P) gehörige Polynomgesetz 0 ist. Die Beh. folgt dann aus dem nachfolgenden Nachtrag zu Kap. 7.2.. ■

23.1.6.LEMMA: Ist R ein unendlicher Körper, und ist $F\in L'(\Gamma(M),N)$ mit $\sum_{i\in\mathbb{N}_o} F(m^{[i]})=0$ $\forall m\in M$ (das zu F gehörige Polynomgesetz verschwindet!), so ist F identisch 0.

BEW.: Annahme $F(z)\neq 0$ für $z\in\Gamma(M)$. Dann existiert eine Linearform $g:N\longrightarrow R$ mit $g(F(z))\neq 0$ (*). $g\circ F\in L'(\Gamma(M),R)$.

$\forall m\in M: \sum_i g\circ F(m^{[i]}) \underset{g \text{ lin.}}{=} g(\sum_i F(m^{[i]}))=0$ nach Vorraussetzung.

Nach 7.2.13. ist damit $g\circ F\equiv 0$ im Widerspruch zu (*). ■

23.1.7.DEF.: $P\in R\{X_k\}_{k\in K}$ heißt "Polynomidentität für A" $\Longleftrightarrow$ $\forall (a_k)_k\in A^K : P(a_k)_k=0$.

Da in $P\in R\{X_k\}_k$ stets nur endlich viele X_k auftreten können, kann man in der Definition A^K natürlich durch $A^{(K)}$ ersetzen.

23.1.8.BEM.: a) [Row 74]1.4.(1): Enthält R einen Unterring R' mit den Eigenschaften i) R' ist unendlicher Integitätsring; ii) $\forall 0\neq r\in R'\ \forall 0\neq a\in A : r\cdot a\neq 0$, so erfüllt A⊗S für jede kommutative R-Algebra S die Identitäten von A.

b) Sind die Vorraussetzungen von a) erfüllt, so stimmen die Polynomidentitäten für A mit den Elementen von Kern(PI) überein.

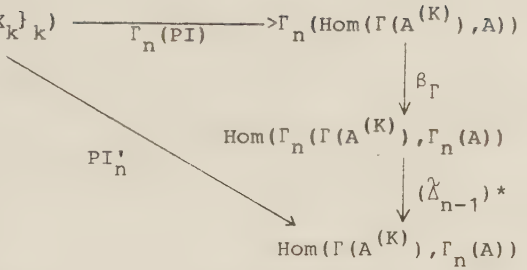
c) [Row 74]1.4.(2): Erfüllt A die Identitäten von $M_n(\mathbb{Z})$, so erfüllt auch A⊗S für jede kommutative R-Algebra S die Identitäten von $M_n(\mathbb{Z})$.

d) Erfüllt A die Identitäten von $M_n(\mathbb{Z})$, so liegen diese in Kern(PI).

23.2. Auf PI sollen nun einige der kan. Homomorphismen aus früheren Kapiteln angewendet werden.

23.2.1.DEF.: Für $n\in\mathbb{N}_0$ sei PI'_n: $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$ als die folgende Komposition definiert:

(D_1)



23.2.2. PI_n': $(\Gamma_n(R\{X_k\}_k),\tau) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(\Gamma(A^{(K)}),\Gamma_n(A)),*)$ ist ein R-Algebra-Homomorphismus.

Bew.: $\Gamma_n(PI)$ ist R-Algebra-Hom.. Es bleibt zu zeigen, daß auch $(\chi_{n-1})^*\circ\beta_{\Gamma n}$ ein R-Algebra-Hom. ist. Siehe dazu 23.2.3..

23.2.3.LEMMA: $(\chi_{n-1})^*\circ\beta_{\Gamma n}:(\Gamma_n((\mathrm{Hom}(\Gamma(M),A),*)),\tau) \longrightarrow$ $(\mathrm{Hom}(\Gamma(M),\Gamma_n(A)),*)$ ist für jedes $M\in R\text{-MOD}$ R-Algebra-Hom..

BEW.: Für $\prod_i f_i^{[\alpha_i]}$, $\prod_j g_j^{[\gamma_j]} \in \Gamma_n(\mathrm{Hom}(\Gamma(M),A))$ gilt:

$$(\chi_{n-1})^*\circ\beta_{\Gamma n}(\prod_i f_i^{[\alpha_i]} \tau \prod_j g_j^{[\gamma_j]}) =$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\gamma_j)_j)} \prod_{i,j} \Gamma_{\alpha_{ij}}(f_i * g_j)\circ\chi_{n-1} \ .$$ Weiter ist:

$$((\chi_{n-1})^*\circ\beta_{\Gamma n}(\prod_i f_i^{[\alpha_i]})) * ((\chi_{n-1})^*\circ\beta_{\Gamma n}(\prod_j g_j^{[\gamma_j]})) =$$

$$= (\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i)\circ\chi_{n-1}) * (\prod_j \Gamma_{\gamma_j}(g_j)\circ\chi_{n-1}) =$$

$$= \mu_{\Gamma_n(A)}\circ(\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i) \underline{\otimes} \prod_j \Gamma_{\gamma_j}(g_j))\circ(\chi_{n-1} \underline{\otimes} \chi_{n-1})\circ\Delta_{\Gamma(M)} \ .$$

Nach 2.4.5. gilt auf $\Gamma_n(\Gamma(M)) \otimes \Gamma_n(\Gamma(M))$:

$$\mu_{AA}\,(\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i) \underline{\otimes} \prod_j \Gamma_{\gamma_j}(g_j)) \quad =$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})\in M((\alpha_i)_i;(\gamma_j)_j)} (\prod_{i,j} \Gamma_{\alpha_{ij}}(f_i \underline{\otimes} g_j)) \circ \mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)} \quad . \text{ Also:}$$

$$\mu_{\Gamma_n(A)}\,(\prod_i \Gamma_{\alpha_i}(f_i) \underline{\otimes} \prod_j \Gamma_{\gamma_j}(g_j)) \quad =$$

$$= \Gamma_n(\mu_A)(\sum_{(\alpha_{ij})} (\prod_{i,j} \Gamma_{\alpha_{ij}}(f_i \underline{\otimes} g_j)) \circ \mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)} \quad =$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})} (\prod_{i,j} \Gamma_{\alpha_{ij}}(\mu_A \circ (f_i \underline{\otimes} g_j))) \circ \mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)} \quad .$$

Es bleibt z.z.: $\Gamma_n(\Delta_{\Gamma(M)}) \circ \chi_{n-1} = \mu_{\Gamma(M)\Gamma(M)} \circ (\chi_{n-1} \underline{\otimes} \chi_{n-1}) \circ \Delta_{\Gamma(M)}$.

Dies ist aber gerade die Aussage von 14.1.11. .

Daß Eins auf Eins abgebildet wird, sieht man folgendermaßen:

$1_{\Gamma_n(\mathrm{Hom}(\Gamma(M),A))} = (\eta_A \circ \varepsilon_{\Gamma(M)})^{[n]} \longmapsto \Gamma_n(\eta_A) \circ \Gamma_n(\pi_0) \circ \chi_{n-1}$.

Es bleibt z.z.: $\Gamma_n(\pi_0) \circ \chi_{n-1}(1_R) = 1_{\Gamma(M)}^{[n]} = 1_R^{[n]}$ und

$\Gamma_n(\pi_0) \circ \chi_{n-1}(\Gamma^+(M)) = 0$.

Dies ergibt sich aber leicht aus 14.1.4.a) und 14.1.9.b), da für $\gamma \in \nabla(I,\alpha)$ ein γ_p ungleich 0 sein muß falls ein $\alpha_i > 0$ ist. ■

23.2.4. $PI'_1 = PI$ (nach geeigneter Identifikation).

Für $i \in \underline{n}_o$, ein Monom $N \in Mo$ und $\prod_{j\in J} (a_{jk})_k^{[\alpha_j]} \in \Gamma(A^{(K)})$ erhält man: $PI'_n(N^{[i]}{}_1{}^{[n-i]})(\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_j]}) \quad =$

$$= \beta_\Gamma \circ \Gamma_n(PI)(N^{[i]}{}_1{}^{[n-i]})(\chi_{n-1}(\prod_j (a_{jk})_k^{[\alpha_j]})) \quad =$$

$$= \sum_{\substack{(\gamma_p)_p \in \nabla(J,\alpha) \\ \gamma_0 := n-|\gamma|}} \Gamma_i(PI(N))\Gamma_{n-i}(PI(1)) \Big(\prod_{p\in\mathbb{N}_0(J)} \Big(\prod_j (a_{jk})_k^{[p_j]} \Big)^{[\gamma_p]} \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{(\gamma_p)_p \\ \gamma_0 := n-|\gamma|}} \sum_{(\gamma_{pq}) \in M((\alpha_p)_p;(i,n-i))} \Big(\prod_p PI(N) \Big(\prod_j (a_{jk})_k^{[p_j]} \Big)^{[\gamma_{p1}]} \Big) \Big(\prod_p PI(1) \Big(\prod_j (a_{jk})_k^{[p_j]} \Big)^{[\gamma_{p2}]} \Big)$$

$$\underset{PI(1)=\eta_A\circ\varepsilon_{\Gamma(A^{(K)})}}{=} \sum_{\substack{(\gamma_p)_p \\ \gamma_0 := n-|\gamma|}} \sum_{\{(\gamma_{pq})_{p\in\mathbb{N}_0(J)};q\in\underline{2} \mid \sum_q \gamma_{pq}=\gamma_p \ \forall p;\ \sum_p \gamma_{p1}=i;\ \gamma_{p2}=\delta_{p0}(n-i)\}} 1_A^{[n-i]} \prod_p PI(N) \Big(\prod_j (a_{jk})_k^{[p_j]} \Big)^{[\gamma_{p1}]} =$$

$$= \sum_{\{(\zeta_p)_{p\in\mathbb{N}_0(J)} \mid \sum_p p_j\zeta_p=\alpha_j \ \forall j\in J;\ \sum_p \zeta_p = i\}} \Big(\prod_p PI(N) \Big(\prod_j (a_{jk})_k^{[p_j]} \Big)^{[\zeta_p]} \Big) 1_A^{[n-i]} .$$

Da $PI(N)\in Hom(\Gamma_{grd(N)}(A^{(K)}),A)$ ist, reicht es solche $(\zeta_p)_p$ zu betrachten, für die $\zeta_p=0$ ist, falls $\sum_j p_j \neq grd(N)$ ist. Die Summationbedingung liefert dann:

$$\sum_j \alpha_j = \sum_j \sum_{\{p \mid \sum_j p_j = grd(N)\}} p_j\zeta_p = grd(N) \sum_{\{p \mid \sum_j p_j = grd(N)\}} \zeta_p =$$

$= grd(N)\cdot i$. Damit ergibt sich:

<u>23.2.5.</u> $PI_n'(N^{[i]}1^{[n-i]}) \in Hom(\Gamma_{grd(N)\cdot i}(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$.

Da PI_n' R-Algebra-Hom. ist und die $N^{[i]}1^{[n-i]}$ nach 9.2.8. die Algebra $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ erzeugen ergibt sich weiter:

<u>23.2.6.</u> $Im(PI_n') \subset \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} Hom(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A)) =: \underline{\underline{H_{A,n}}}$ (Sub-Algebra von $Hom(\Gamma(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$)

Außerdem erhält man aus den obigen Rechnungen:

23.2.7. $PI'_n(N^{[i]}{}_1{}^{[n-i]})((a_k)^{[grd(N)\cdot i]}) =$

$= (PI(N)((a_k)^{[grd(N)]}_k)^{[i]}{}_1{}^{[n-i]}_A = N(a_k)^{[i]}_k{}_1{}^{[n-i]}_A$

Ist $(C(H_{A,n}), \kappa_{H_{A,n}})$ die Faktorkommutatoralgebra von $H_{A,n}$, so faktorisiert $\kappa_{H_{A,n}} \circ PI'_n \circ \pi_n : \hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k) \longrightarrow C(H_{A,n})$ über $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$.

23.2.8.DEF.: PI_n bezeichne den R-Algebra-Hom., für den das folgende Diagramm kommutativ ist ($PI_n = C(\kappa_{H_{A,n}} \circ PI'_n \circ \pi_n)$):

(D_2)

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k) & \xrightarrow{\kappa} & \overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \\ \Gamma_n(R\{X_k\}_k) & & \downarrow{\scriptstyle PI_n} \\ \downarrow{\scriptstyle PI'_n} & & \\ H_{A,n} & \xrightarrow{\kappa_{H_{A,n}}} & C(H_{A,n}) \end{array}$$

23.2.9.DEF.: Die Elemente von Kern PI_n heißen "kommutative polynomiale Identitäten der Stufe n für A". Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird auch einfach von "Identitäten" gesprochen werden.

23.2.10.SATZ: $\kappa(\mathfrak{T}^+_{n+1}) \subset \text{Kern}(PI_n)$.

BEW.: Nach 13.2.8. liegt $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ im Kern von π_n . Die Beh. folgt aus der Kommutativität von (D_2). ∎

Es wird sich zeigen, daß bei geeignetem A in 23.2.10. so-

gar die Gleichheit auftreten kann.

Da $\Gamma(A^{(K)})$ cocommutativ ist ist $\mathrm{Hom}(\Gamma(A^{(K)}),C(\Gamma_n(A)))$ kommutativ, und man könnte vermuten, daß $C(H_{A,n})$ gleich $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^{(K)}),C(\Gamma_n(A)))$ ist.
Deshalb soll im nächsten Kapitel für $A=\mathrm{End}(R^n)$ zunächst $C(\Gamma_n(A))$ untersucht werden.

KAPITEL 24 : Die Faktorkommutatoralgebren von $\Gamma_n(A)$ und $\bigoplus_j \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$ für zentral separable Algebren A vom Rang n^2 .

Für zentral separable Algebren A von festem Rang n^2 wurde in [Schm 71] gezeigt, daß eine multiplikative Form $\phi_A:\Gamma_n(A) \longrightarrow R$ existiert, die die Norm repräsentiert. Hier wird nun gezeigt, daß R die Faktorkommutatoralgebra von $\Gamma_n(A)$ ist und ϕ_A der kanonische Epimorphismus $\kappa_{\Gamma_n(A)}$. Damit ist es dann möglich, zu zeigen, daß tatsächlich für zentral separable Algebren vom Rang n^2 gilt:

$$C(H_{A,n}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(\Gamma(A^{(K)}),C(\Gamma_n(A))).$$

24.1. Für $n>1$ sei $\chi:\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)) \longrightarrow B$ ein beliebiger R-Algebra-Hom. in eine beliebige kommutative R-Algebra B. $\overline{\chi}: \hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^n)) \xrightarrow[\pi_n]{} \Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)) \xrightarrow[\chi]{} B$ ist dann ebenfalls ein R-Algebra-Hom., für den gilt:

1) $\forall x\in\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)) : \overline{\chi}(\mathrm{Sh}(x)) = \chi(x)$

2) $\forall y \in \mathfrak{Z}_{n+1} := \bigoplus_{i>n} \hat{\Gamma}_i(\mathrm{End}(R^n)) : \bar{\chi}(y) = 0$.

3) $\bar{\chi}\left(\prod_{i,j\in\underline{n}} e_{ij}^{<\alpha_{ij}>}\right) = 0$ falls $\sum_i \alpha_{ik} > 1$ für ein $k\in\underline{n}$.

BEW. durch Induktion über $\sum_{i,j\in\underline{n}} \alpha_{ij}$ für festes $k\in\underline{n}$:

Für $\sum_{i,j} \alpha_{ij} > n$ folgt die Beh. aus 2). Es sei also $\sum_{i,j} \alpha_{ij} \leq n$, $m := \sum_i \alpha_{ik} > 1$. Dann existiert ein $l\in\underline{n}$ mit $l\neq k$ und $\sum_i \alpha_{il} = 0$.

$$(*) \qquad \beta_{ij} := \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{für } j\neq k,l \\ 0 & \text{für } j=k \\ \alpha_{ik} & \text{für } j=l \end{cases}$$

$$\bar{\chi}\left(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\alpha_{ij}>}\right) = \bar{\chi}\left(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>} \tau\, e_{lk}^{<m>}\right)$$

$$- \sum_{\substack{(\zeta_i+\eta_i=\beta_{il})_i \\ \gamma+\sum_i \eta_i = m;\ \gamma>0}} \bar{\chi}\left(\prod_{\substack{i\in\underline{n} \\ j\neq l}} e_{ij}^{<\beta_{ij}>} \prod_{i\in\underline{n}} e_{il}^{<\zeta_i>} \prod_{i\in\underline{n}} e_{ik}^{<\eta_i>} e_{lk}^{<\gamma>}\right) .$$

Aus den Summationsbedingungen folgt:

a) $\sum_{\substack{i\in\underline{n} \\ j\neq l}} \beta_{ij} + \sum_i \zeta_i + \sum_i \eta_i + \gamma = \sum_{i,j} \beta_{ij} + \gamma \overset{(\bar{*})}{=} \sum_{i,j} \alpha_{ij} + \gamma >$

$> \sum_{i,j} \alpha_{ij}$, falls $\gamma > 0$ ist.

b) $\sum_{i\in\underline{n}} \beta_{ik} + \sum_i \eta_i + \gamma \overset{(\bar{*})}{=} \sum_i \eta_i + \gamma = m$.

Nach Ind.Vor. ergibt sich also:

$$(**) \quad \bar{\chi}\left(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\alpha_{ij}>}\right) = \bar{\chi}\left(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\right)\bar{\chi}\left(e_{lk}^{<m>}\right) .$$

$$\bar{\chi}\left(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\right) = \bar{\chi}\left(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>} \tau\, e_{ll}^{<m>}\right)$$

$$- \sum_{\substack{(\zeta_i+\eta_i=\beta_{il})_i \\ \gamma+\sum_i \eta_i = m;\ \gamma>0}} \bar{\chi}\left(\prod_{\substack{i\in\underline{n} \\ j\neq l}} e_{ij}^{<\beta_{ij}>} \prod_i e_{il}^{<\zeta_i>} \prod_i e_{il}^{<\eta_i>} e_{ll}^{<\gamma>}\right)$$

Aus den Summationsbedingungen folgt:

a) $\sum\limits_{\substack{i\in n\\ j\neq \bar{1}}} \beta_{ij} + \sum\limits_{i} \zeta_i + \sum\limits_{i} \eta_i + \gamma = \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} + \gamma > \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} \overset{(\bar{*})}{\geq} \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}$

falls $\gamma>0$ ist.

b) $\sum\limits_{i} \zeta_i + \sum\limits_{i} \eta_i + \gamma = \sum\limits_{i} \beta_{il} + \gamma \overset{(\bar{*})}{\geq} \sum\limits_{i} \alpha_{ik} + \gamma > m$ falls $\gamma>0$.

Nach Ind.Vor. erhält man:

$$(***)\quad \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\Big) = \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\Big)\bar{\chi}(e_{ll}^{<m>})$$

$$Z := \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\alpha_{ij}>}\Big) \underset{(***)}{\overset{(\bar{**})}{=}} \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\Big)\bar{\chi}(e_{ll}^{<m>})\bar{\chi}(e_{lk}^{<m>}) \underset{\text{B kommut.}}{=}$$

$$= \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\Big)\bar{\chi}(e_{lk}^{<m>})\bar{\chi}(e_{ll}^{<m>}) .$$

$\bar{\chi}(e_{lk}^{<m>})\bar{\chi}(e_{ll}^{<m>}) = \bar{\chi}(e_{lk}^{<m>} \tau\, e_{ll}^{<m>}) = \bar{\chi}(e_{lk}^{<m>} e_{ll}^{<m>})$. Damit

gilt: $Z = \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>}\Big)\bar{\chi}(e_{lk}^{<m>}e_{ll}^{<m>}) = \bar{\chi}\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\beta_{ij}>} \tau\, e_{lk}^{<m>}e_{ll}^{<m>}\Big)$

$$= \sum_{\substack{(\zeta_i+\eta_{i1}+\eta_{i2}=\beta_{il})_i\\ \gamma_1+\sum_i \eta_{i1}=m;\ \gamma_2+\sum_i \eta_{i2}=m}} \bar{\chi}\Big(\prod_{\substack{i\in n\\ j\neq \bar{1}}} e_{ij}^{<\beta_{ij}>} \prod_i e_{il}^{<\zeta_i>} \prod_i e_{ik}^{<\eta_{i1}>} \prod_i e_{il}^{<\eta_{i2}>} e_{lk}^{<\gamma_1>} e_{ll}^{<\gamma_2>}\Big).$$

Aus den Summationsbedingungen folgt:

a) $\sum\limits_{\substack{i\in n\\ j\neq \bar{1}}} \beta_{ij} + \sum\limits_{i}(\zeta_i+\eta_{i1}+\eta_{i2}) + \gamma_1 + \gamma_2 = \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} + \gamma_1 + \gamma_2 >$

$> \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} = \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}$; denn, wäre $\gamma_1+\gamma_2=0$, so hätte man:

$\sum\limits_{i}(\eta_{i1}+\eta_{i2}) = 2m$. Dann folgt : $m=\sum\limits_i \beta_{il} = \sum\limits_i \zeta_i + \sum\limits_i (\eta_{i1}+\eta_{i2}) =$

$= \sum\limits_i \zeta_i + 2m \geq 2m$. Widerspruch!

b) Annahme: $\sum\limits_i \zeta_i + \sum\limits_i \eta_{i2} + \gamma_2 \leq 1$ und $\sum\limits_i \eta_{i1} + \gamma_1 \leq 1$.

Dann ist $\sum_i(\zeta_i+\eta_{i1}+\eta_{i2}) + \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$, woraus wegen $\gamma_1+\gamma_2\geq 1$ folgt: $m= \sum_i \beta_{i1} \leq 1$. Widerspruch!

Die Ind.Vor. ist also anwendbar, und die Beh. folgt. ■

Vergleiche hierzu auch den Beweis für die Eindeutigkeit der Normform in [Berg 68].

Analog wie in 3) erhält man:

4) $\bar{\chi}(\prod_{i,j} e_{ij}^{<\alpha_{ij}>}) = 0$, falls $\sum_j \alpha_{kj} > 1$ ist für ein $k\epsilon\underline{n}$.

5) $\bar{\chi}(e_{ij}^{<1>}) = \delta_{ij}\cdot 1_B$.

BEW.: $\bar{\chi}(e_{ij}^{<1>}) = \chi(e_{ij}^{[1]}{}_1^{[n-1]}) = \chi(e_{ij}^{[1]}(\sum_{k\epsilon\underline{n}} e_{kk})^{[n-1]}) =$

$= \sum_{i_1+\ldots i_n=n-1} \chi(e_{ij}^{[1]} e_{11}^{[i_1]} \ldots e_{nn}^{[i_n]}) \overset{3),4)}{=}$

$= \sum_{k\epsilon\underline{n}} \chi(e_{ij}^{[1]} e_{11}^{[1]} \ldots e_{k-1k-1}^{[1]} e_{k+1k+1}^{[1]} \ldots e_{nn}^{[1]}) \overset{3),4)}{=}$

$= \begin{cases} 0 & \text{falls } i\neq j \\ \chi(e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}) & \text{sonst} \end{cases}$.

$1_B=\chi(1^{[n]}) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=n} \chi(e_{11}^{[i_1]}\ldots e_{nn}^{[i_n]}) \overset{3),4)}{=}$

$\chi(e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]})$. Es folgt die Beh.. ■

6) $\chi(e_{1\sigma(1)}^{[1]}\ldots e_{n\sigma(n)}^{[1]}) = \mathrm{sgn}\sigma\cdot 1_B$ für jedes $\sigma\epsilon\Sigma_n$.

BEW.: Aus 21.1.7 folgt: $\bar{\chi}(e_{1\sigma(1)}^{<1>}\ldots e_{n\sigma(n)}^{<1>}) =$

$\sum_{\rho\epsilon\Sigma_n} \mathrm{sgn}\rho\ \bar{\chi}(Z_\rho)$, wobei Z_ρ folgendermaßen definiert ist:

$Z_\rho := \tau_{l\in\underline{k}} (e_{i_{11}\sigma(i_{11})} e_{i_{12}\sigma(i_{12})} \cdots e_{i_{1r_1}\sigma(i_{1r_1})})^{<1>}$, falls

(*) $\rho = (i_{11}, i_{12}, \ldots, i_{1r_1}) \ldots (i_{k1}, \ldots, i_{kr_k})$ die Zyklendarstellung von ρ ist (in geeigneter Weise).

$Z_\rho = 0$, falls nicht für alle $l\in\underline{k}$

(**) $\sigma(i_{11}) = i_{12}$, $\sigma(i_{12}) = i_{13}$, ..., $\sigma(i_{1r_1-1}) = i_{1r_1}$ ist.

Ist dies für $\rho\in\Sigma_n$ erfüllt, so gilt:

$$\overline{\chi}(Z_\rho) = \overline{\chi}(e_{i_{11}\sigma(i_{1r_1})}^{<1>}) \ldots \overline{\chi}(e_{i_{k1}\sigma(i_{kr_k})}^{<1>}) \overset{5)}{=}$$

$$= \begin{cases} 1_B & \text{falls } \sigma(i_{1r_1}) = i_{11} \quad \forall l\in\underline{k} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zusammen mit (**) heißt dies aber, daß $\overline{\chi}(Z_\rho) \neq 0$ impliziert: σ und ρ haben die gleiche Zyklendarstellung (*); es ist also $\sigma = \rho$. Also gilt:

$$\chi(e_{1\sigma(1)}^{[1]} \ldots e_{n\sigma(n)}^{[1]}) = \operatorname{sgn}\sigma\ \overline{\chi}(Z_\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot 1_B \quad \blacksquare$$

Zusammen hat man nun für $\prod_{i,j} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]} \in \Gamma_n(\operatorname{End}(R^n))$:

$$\chi\Big(\prod_{i,j} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]}\Big) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\sigma\ 1_B & \text{falls } (\alpha_{ij})_{ij} \text{ die zu } \sigma \text{ gehörige} \\ & \text{Permutationsmatrix ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>24.1.1.SATZ:</u> Für jede kommutative R-Algebra B existiert genau ein R-Algebra-Hom. χ_B von $\Gamma_n(\operatorname{End}(R^n))$ nach B. Insbesondere ist die homogene Determinante ϕ_{Dn} der eindeutig bestimmte R-Algebra-Hom. von $\Gamma_n(\operatorname{End}(R^n))$ in den Grundring R, und χ_B faktorisiert über ϕ_{Dn} für jedes kommutative B. (Vgl. 18.2.9.) Es gilt:

$(C(\Gamma_n(\operatorname{End}(R^n))), \kappa_{\Gamma_n(\operatorname{End}(R^n))}) \cong (R, \phi_{Dn})$. $\blacksquare$

24.1.2.BEM.: Die Aussage von 24.1.1. bleibt natürlich richtig, wenn man R^n durch einen isomorphen Modul M ersetzt.

24.1.3.KOR.: $\mathrm{Kern}(\phi_{Dn})$ ist das von den Elementen der Form $[x,y]$ mit $x,y \in \Gamma_n(\mathrm{End}(R^n))$ in $(\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)),\tau)$ erzeugte Ideal. ∎

Durch

$$\prod_{i,j\in\underline{n}} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]} \longmapsto \begin{cases} \prod_{i,j} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]} - \mathrm{sgn}\sigma\, e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]} & \text{falls } (\alpha_{ij})_{ij} \text{ Perm.Matrix zu einem } \sigma\neq id \text{ ist.} \\ \prod_{i,j} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]} & \text{sonst .} \end{cases}$$

wird ein R-Modul-Hom. $f\in\mathrm{End}(\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)))$ definiert.

Ordnet man die Standardbasis $\{ \prod_{i,j} e_{ij}^{[\beta_{ij}]} \mid |\beta|=n \}$ so an, daß $e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$ kleinstes Element ist, so ist die zu f gehörige Matrix unitriangulär, also invertierbar.
Ist B die Menge der $f(\prod_{i,j} e_{ij}^{[\alpha_{ij}]})$ mit $\sum_{i,j}\alpha_{ij}=n$ ohne das Element $e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$, so ist die Menge $B\ \{e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}\}$ Basis von $\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n))$ und es gilt also:

24.1.4. $\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)) = [B] \oplus R\, e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$.

Nach der Definition von f gilt: $[B] \subset \mathrm{Kern}(\phi_{Dn})$.
Ist $x\in\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n))$, $x=x_1+x_2$ mit $x_1\in[B]$, $x_2\in R\, e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$, so folgt: $\phi_{Dn}(x_1+x_2)=\phi_{Dn}(x_2)=r\cdot 1_R \neq 0$, falls $r\neq 0$ ist und $x_2=r\cdot e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$. Demnach gilt:

24.1.5. $[B] = \mathrm{Kern}(\phi_{Dn})$

Für das folgende sei $\underline{A:=\mathrm{End}(R^n)}$.

Der kan. R-Algebra-Hom. (vgl. 2.2.2.)

kan : $\Gamma(A^{(K)})^* \otimes \Gamma_n(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$ bildet die R-Subalgebra $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^* \otimes \Gamma_n(A)$ des Definitionsbereichs bijektiv ([Bou 74] II§4.2 Prop.2(i)) auf die R-Subalgebra $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$ des Wertebereiches ab.

Im folgenden Diagramm bezeichne $C(id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)})$ den eindeutig bestimmten R-Algebra-Hom., der das Diagramm (D_1) kommutativ macht:

(D_1)

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^*) \otimes \Gamma_n(A) & \xrightarrow{\quad id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)} \quad} & (\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^*) \otimes C(\Gamma_n(A)) \\ \Big\downarrow \kappa_{((\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^*)\otimes\Gamma_n(A))} & \nearrow C(id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)}) & \\ C((\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^*) \otimes \Gamma_n(A)) & & \end{array}$$

Da $id \underline{\otimes} \kappa_{\Gamma_n(A)}$ surjektiv ist, gilt dies auch für $C(id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)})$.

D sei eine beliebige Basis des freien (!) R-Moduls $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^*$, B wie oben definiert. Für ein beliebiges aber festes Element $z := \sum_{\substack{b\in B\\ d\in D}} r_{db}\, d\otimes b + \sum_{d\in D} s_d\, d\otimes e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$

(in der Basisdarstellung, $r_{bd}, s_d \in R$) aus $E := (\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)})^*)\otimes\Gamma_n(A))$ soll angenommen werden:

$C(id \underline{\otimes} \kappa_{\Gamma_n(A)})(\kappa_E(z)) = 0$.

Da $B=\mathrm{Kern}(\phi_{Dn})=\mathrm{Kern}(\kappa_{\Gamma_n(A)})$ ist, folgt: $0 = id \underline{\otimes} \kappa_{\Gamma_n(A)}(z) = \sum_{d\in D} s_d\, d\otimes e_{11}^{[1]}\ldots e_{nn}^{[1]}$. Damit ist $s_d = 0\ \forall d\in D$ und $z = \sum_{\substack{b\in B\\ d\in D}} r_{db}\, d\otimes b$. Nach 24.1.3. und 24.1.5. ist jedes Element $b\in B$ Linearkombination von Elementen $u\tau[x,y]\tau v$ mit

$u,x,y,v \in \Gamma_n(A)$. $\kappa_E(z)$ ist deshalb eine Linearkombination von Elementen $\kappa_E(d \otimes u\tau[x,y]\tau v) = \kappa_E((d\otimes u)\cdot[1\otimes x, 1\otimes y].(1\otimes v)) = 0$ $(1 = 1_{(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Gamma_j(A^{(K)}))})$. Damit ist gezeigt, daß $\kappa_E(z)=0$ und also $C(id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)})$ auch injektiv ist.

24.1.6.SATZ: Für $A=End(R^n)$ ist

$$(C(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A)), \kappa_{\bigoplus_j Hom(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A))}) \cong$$

$$(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j(A^{(K)}),R),(\phi_{Dn*})_j) \ . \ \blacksquare$$

24.2. Im Folgenden sei A eine beliebige aber feste zentral separable R-Algebra von festem Rang $m=n^2$, d.h.:
i) $R\cdot 1_A = Zentr(A)$; ii) A ist projektiver $A\otimes A^{op}$-Modul;
iii) A ist als R-Modul endlich erzeugt projektiv von festem Rang m. (Vgl. etwa [DeM/Ing 71] II 1.+3.)

24.2.1.SATZ: ([Knus/Oja 74] III Cor.6.7.)
Ist A eine zentral separable R-Algebra von festem Rang n^2, so existiert eine treuflache kommutative Erweiterung $S\supset R$, so daß $A\otimes S \cong M_n(S)$ ist. ■

24.2.2.LEMMA: Für einen treuflachen R-Modul L stimmen zwei R-Modul-Hom. f und g von M nach N genau dann überein, wenn $f\underline{\otimes}id_L$ und $g\underline{\otimes}id_L$ von $M\otimes L$ nach $N\otimes L$ übereinstimmen.

BEW.: Die Aussage folgt sofort mit [Bou 72] I§3.1 Prop.1.c). ■

In [Schm 71] wird für eine zentral separable R-Algebra vom

Rang n^2 eine Hauptnorm (N_A^R, ϕ_A^R) definiert, von der nachgewiesen wird (§6.1.HiSa 6.5.), daß sie eine multiplikative Form vom Grad n auf A mit Werten in R ist. $\phi_A^R: \Gamma_n(A) \longrightarrow R$ ist also R-Algebra-Hom. Die zugehörige Spurbilinearform ist nicht singulär . Weiter wird gezeigt (§6.1. Satz19), daß die Fortsetzung $((N_A^R)_T, (\phi_A^R)_T)$ dieser Form gerade die Hauptnorm $(N_{A\otimes T}^T, \phi_{A\otimes T}^T)$ der zentral separablen R⊗T-Algebra A⊗T von festem Rang n^2 ist. Insbesondere gilt also:
$\phi_{A\otimes T}^T = (\phi_A^R \otimes id_T) \circ (\nu^{RT})^{-1} = (\phi_A^R)_T$. Dabei ist
$\nu^{RT}: \Gamma^R(A)\otimes T \longrightarrow \Gamma^T(A\otimes T)$ der kanonische Isomorphismus aus 1.2.12.. Es kommutiert demnach das folgende Diagramm (vgl.12.2.):

(D_2)

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{\Gamma}^T(A\otimes T) & \xrightarrow{\pi_n} & \Gamma_n^T(A\otimes T) & \xrightarrow{\phi_{A\otimes T}^T} & T \\
\downarrow{\scriptstyle (\hat{\nu}^{RT})^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle (\nu^{RT})^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan.Iso.}} \\
\hat{\Gamma}^R(A)\otimes T & \xrightarrow{\pi_n\otimes id_T} & \Gamma_n^R(A)\otimes T & \xrightarrow{\phi_A^R\otimes id_T} & R\otimes T
\end{array}$$

Weiter sei noch erwähnt, daß die Hauptnorm auf A als multiplikative Form vom Grad n eindeutig bestimmt ist ([Schm 71]§6.1. Satz 18), und damit im Fall A=End(R^n) mit der Determinante übereinstimmt.

24.2.3.DEF.: Für eine zentral separable R-Algebra A vom Rang n^2 bezeichne ϕ_{An} den nach [Schm 71] eindeutig bestimmten R-Algebra-Hom. $\phi_{An}: \Gamma_n(A) \longrightarrow R$. (Schreibe ϕ_{An}^R falls die Kennzeichnung des Grundrings nötig ist.)

24.2.4.SATZ: A sei eine zentral separable R-Algebra von festem Rang n^2. Dann existiert für jede kommutative R-Algebra B genau ein R-Algebra-Hom. $\chi_B: \Gamma_n(A) \longrightarrow B$, nämlich $\chi_B = \eta_B \circ \phi_{An}$.

BEW.: $\chi:\Gamma_n(A) \longrightarrow B$ sei ein beliebiger R-Algebra-Hom.. Für eine treuflache Erweiterung S von R wie in 24.2.1. hat man dann den S-Algebra-Hom. $\Gamma_n^S(M_n(S)) \cong \Gamma_n^S(A\otimes S) \cong \Gamma_n^R(A)\otimes S \xrightarrow{\chi\underline{\otimes}id_S} B\otimes S$ in die kommutative S-Algebra B⊗S, der nach 24.1.1. eindeutig bestimmt ist als $\eta_{B\otimes S}\circ\phi_{Dn}^S$. Wegen der Eindeutigkeit von ϕ_{Dn}^S kommutiert

(D_3)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n^R(A)\otimes S & \cong & \Gamma_n^S(M_n(S)) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{An}^R\underline{\otimes}id_S} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{Dn}^S} \\ R\otimes S & \cong & S \end{array} \quad .$$

Damit kommutiert aber auch

(D_4)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n^R(A)\otimes S & \xrightarrow{\chi\underline{\otimes}id_S} & B\otimes S \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{An}^R\underline{\otimes}id_S} & \nearrow{\scriptstyle \eta_B\underline{\otimes}id_S} & \\ R\otimes S & & \end{array} \quad .$$

($\eta_{B\otimes S}: S\cong R\otimes S \xrightarrow{\eta_B\underline{\otimes}id_S} B\otimes S$!)

Es folgt: $\chi\underline{\otimes}id_S = (\eta_B\circ\phi_A^R)\underline{\otimes}id_S$. Nach 24.2.2. ergibt sich $\chi = \eta_B\circ\phi_{An}$. Existenz und Eindeutigkeit von χ_B sind damit bewiesen. ■

24.2.5.KOR.: Für eine zentral separable R-Algebra A von festem Rang n^2 ist $(C(\Gamma_n(A)),\kappa_{\Gamma_n(A)}) \cong (R,\phi_{An})$.

24.2.6.DEF.: Eine R-Algebra A heißt "C_n-Algebra" :<==> $C(\Gamma_n(A)) \cong R$.

24.2.7.KOR.: Ist A eine R-Algebra, so gilt:

A ist A_n-Ring mit Zentrum R $\Longrightarrow$ A ist C_n-Algebra.
(Ein Ring A heißt A_n-Ring: $\Longleftrightarrow$ A erfüllt die Polynomidentitäten von $M_n(\mathbb{Z})$, und kein echter Faktorring erfüllt diese Identitäten).

BEW.: Nach dem Satz von Artin-Procesi sind die A_n-Ringe genau die zentral separablen Algebren vom Rang n^2 über dem Zentrum (vgl. etwa [Goldie76] Th.1). ∎

Korollar 24.2.7 ist hier nur formuliert worden, um den Zusammenhang mit den Polynomidentitäten nicht aus dem Auge zu verlieren.

PROBLEM: Ist jede C_n-Algebra auch A_n-Ring bzw. zentral separabel vom Rang n^2 ?

24.2.8. Einige Eigenschaften von C_n-Algebren A:

1) Es existiert genau ein R-Algebra-Hom. $\Gamma_n(A) \longrightarrow R$ (klar)

2)a) $\Gamma_n(A)$ ist treue R-Algebra und R ist R-direkter Summand von $\Gamma_n(A)$.

b) Enthält R keine nilpotenten Elemente ($\neq 0$), so ist A treue R-Algebra.

c) Ist R torsionsfrei zu n, so ist A treue R-Algebra.

BEW.: 2) $R \cong \Gamma_n(R) \xrightarrow{\Gamma_n(\eta_A)} \Gamma_n(A) \xrightarrow{\kappa_{\Gamma_n(A)}} C(\Gamma_n(A)) \cong R$ ist R-Algebra-Hom, also gleich id_R. Es folgt a).

Für $0 \neq r \in R$ hat man:

i) $r \cdot 1_A = 0 \Rightarrow 0 = (r \cdot 1_A)^{[n]} = r^n \cdot 1_A^{[n]}$. Da $\Gamma_n(A)$ treu ist folgt $r^n = 0$ und damit b).

ii) $r\cdot 1_A = 0 \Rightarrow 0=(r\cdot 1_A)^{[1]}1_A^{[n-1]} = r\cdot n\, 1_A^{[n]}$. Da $\Gamma_n(A)$ treu ist, folgt $r\cdot n = 0$ und damit c). ■

24.2.9.BEM.: Nach [Schm 71]Satz 30 §6.4 folgt für endlich-erzeugt projektives A aus der Existenz eines R-Algebra-Hom. $\chi:\Gamma_n(A) \longrightarrow R$ mit nicht singulärer Bilinearform $\chi(x\cdot y^{[1]}1_A^{[n-1]})$ bereits die Separabilität von A.

Nun sollen wieder zentral separable R-Algebren A betrachtet werden.

24.2.10.SATZ: Ist A eine zentral separable R-Algebra vom Rang n^2, dann ist $C(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A))$ isomorph zu $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^{(K)}),R)$ und $\kappa_{\oplus \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^{(K)}),\Gamma_n(A))}$ entspricht dann $(\phi_{An^*})_j$.

BEW.: A ist endlich-erzeugt projektiv, und man kann deshalb analog zum Beweis von 24.1.6. vorgehen. Es reicht wieder die Injektivität von $C(id\otimes\kappa_{\Gamma_n(A)})$ nachzuweisen, wobei wieder das Diagramm (D_1) erfüllt ist. Ist S treuflache Erweiterung von R mit $A\otimes S\cong M_n(S)$, so reicht es zu zeigen, daß $C(id\otimes\kappa_{\Gamma_n(A)})\underline{\otimes} id_S$ injektiv ist, also $0=\mathrm{Kern}(C(id\otimes\kappa_{\Gamma_n(A)})\underline{\otimes} id_S)$ S treuflach $\mathrm{Kern}(C(id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)}))\otimes S$. S ist treuflach impliziert dann, daß $\mathrm{Kern}(C(id\underline{\otimes}\kappa_{\Gamma_n(A)}))=0$ ist.

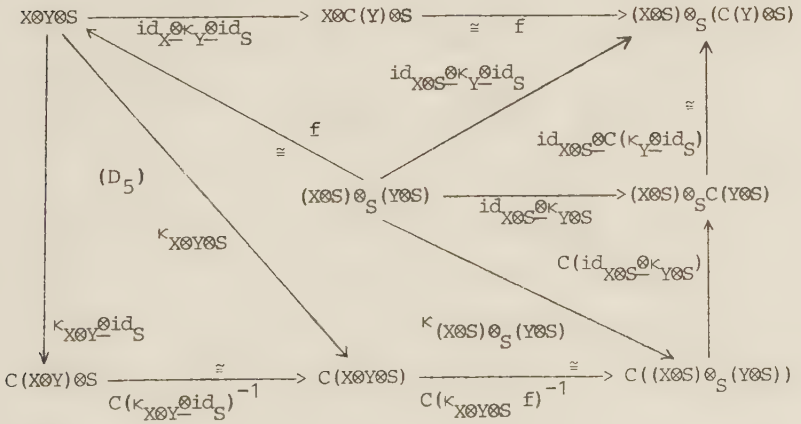
1) Für jede R-Algebra X gilt: $(C(X)\otimes S,\kappa_{X\underline{\otimes}id_S}) \cong (C(X\otimes S),\kappa_{X\otimes S})$ (Isomorphie von S-Algebren! S treuflach)

BEW.: Wieder reicht es die Injektivität von $C(\kappa_{X\underline{\otimes}id_S})$ nachzuweisen. $\mathrm{Kern}(\kappa_{X\underline{\otimes}id_S}) \underset{S\text{ flach}}{\cong} \mathrm{Kern}(\kappa_X)\otimes S$. $\mathrm{Kern}(\kappa_X)$ wird als

Ideal in der R-Algebra X von Kommutatoren erzeugt. Also wird auch $\mathrm{Kern}(\kappa_X)\otimes S$ als Ideal in der S-Algebra $X\otimes S$ von Kommutatoren erzeugt und liegt damit in $\mathrm{Kern}(\kappa_{X\otimes S})$. Umgekehrt ist nach der universellen Eigenschaft von $C(X\otimes S)$ klar, daß $\mathrm{Kern}(\kappa_{X\otimes S})$ in $\mathrm{Kern}(\kappa_X\otimes id_S)$ enthalten ist. $C(\kappa_X\otimes id_S)$ ist also bijektiv.

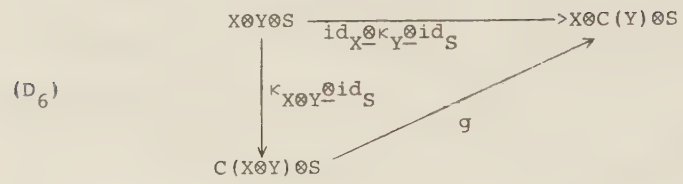
2) Ist $f:Y \longrightarrow Y'$ Isomorphismus von S-Algebren, so ist $C(\kappa_{Y'}\circ f):C(Y) \longrightarrow C(Y')$ ein Isomorphismus, denn $C(\kappa_Y\circ f^{-1})\circ C(\kappa_{Y'}\circ f)\circ\kappa_Y = C(\kappa_Y\circ f^{-1})\circ\kappa_{Y'}\circ f = \kappa_Y\circ f^{-1}\circ f = \kappa_Y$. Damit ist $C(\kappa_Y\circ f^{-1})\circ C(\kappa_{Y'}\circ f) = id_{C(Y)}$. Analog ist $C(\kappa_{Y'}\circ f)\circ C(\kappa_Y\circ f^{-1}) = id_{C(Y')}$.

3) Für $X=\bigoplus_j \Gamma_j(A^{(K)})^*$ (oder eine andere kommutative Algebra) und Y R-Algebra ist der kan. S-Algebra-Isomorphismus $f:(X\otimes_R Y)\otimes_R S \cong (X\otimes_R S)\otimes_S(Y\otimes_R S)$ eine natürliche Transf.. Deshalb und wegen 1),2) kommutiert das folgende Diagramm in S-ALG:



Mit $g:=f\circ(id_{X\otimes S}\otimes C(\kappa_Y\otimes id_S))\circ C(id_{X\otimes S}\otimes\kappa_{Y\otimes S})\circ C(\kappa_{X\otimes Y\otimes S}\ f)^{-1}\circ C(\kappa_{X\otimes Y}\otimes id_S)$

kommutiert das folgende Diagramm:

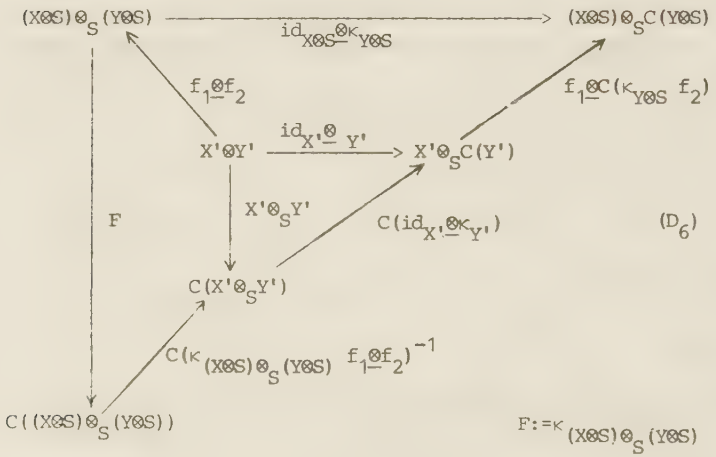


(D_6)

Da $C(X\otimes Y)\otimes S$ Faktor-S-Algebra von $X\otimes Y\otimes S$ ist, muß g mit $C(id_X\otimes\kappa_Y)\otimes id_S$ übereinstimmen. Es bleibt damit zu zeigen, daß g bzw. $C(id_{X\otimes S}\otimes\kappa_{Y\otimes S})$ Isomorphismus ist, falls $Y=\Gamma_n(A)$ und $X=\oplus_j\Gamma_j(A^{(K)})^*$ sind.

4) Mit diesen X und Y sowie $X'=\oplus_j\Gamma_j^S(M_n(S)^{(K)})^*$ und $Y'=\Gamma_n^S(M_n(S))$ gilt:

Sind $f_1:X'\longrightarrow X\otimes S$ und $f_2:Y'\longrightarrow Y\otimes S$ die kanonischen S-Algebra-Isomorphismen, so kommutiert wegen 2) folgendes Diagramm in S-ALG:



Wegen der universellen Eigenschaft von $C((X\otimes S)\otimes_S(Y\otimes S))$ muß gelten:

$f_1 \underline{\otimes} C(\kappa_{Y \otimes S}\ f_2) \circ C(id_X, \underline{\otimes} \kappa_{Y'}) \circ C(\kappa_{(X \otimes S) \otimes_S (Y \otimes S)} \circ f_1 \underline{\otimes} f_2)^{-1} =$
$= C(id_{X \otimes S} \underline{\otimes} \kappa_{Y \otimes S})$. Somit bleibt nur zu zeigen, daß
$C(id_X, \underline{\otimes}\ \kappa_{Y'})$ ein Isomorphismus ist. Dies wurde aber für den Beweis von 24.1.6. bereits getan. ∎

Zum Abschluß des Kapitels noch eine Bemerkung:

24.2.11.BEM.: Für den Übergang zu zentral separablen Algebren ohne festen Rang ist es , wie bei der Determinante, sinnvoll ϕ_{An} fortzusetzen zu
$\underline{\underline{\phi_D}}: \hat{\Gamma}(A) \xrightarrow{\pi_n} \Gamma_n(A) \xrightarrow{\phi_{An}} R$.

KAPITEL 25 : Kommutative polynomiale Identitäten für $M_n(R)$
II. Ergebnisse und neue Fragestellungen.

Jetzt soll gezeigt werden, daß die in Kap. 23 eingeführten "polynomialen Identitäten der Stufe n" (eingeführt für beliebige R-Algebren A!) für $M_n(R)$ über einem Körper R der Charakteristik 0 genau die"kommutativen Spuridentitäten von [Pro 76] sind. Das von Procesi, Razmyslov und Helling unabhängig gefundene erzeugende Element des T-Ideals der Spuridentitäten ist gerade $\kappa(X_1^{<1>}X_2^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>})$.
Von $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$wurde in Kap. 21 gezeigt, daß es das T-Ideal $\mathfrak{T}_{n+1}^+$ von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ erzeugt. Hier zeigt sich nun, daß $\kappa(X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>})$ gerade das T-Ideal $\kappa(\mathfrak{T}_{n+1}^+)$ erzeugt. Die Spuridentitäten sind also genau die Elemente der Filter-

komponente $\kappa(\mathfrak{T}^+_{n+1})$, jene Elemente also, von denen in 23.2.10. festgestellt wurde, daß sie trivialerweise Identitäten sind.

Es ist klar, daß in beliebiger Charakteristik $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ nicht von $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ erzeugt wird. Vielmehr ist zu erwarten, daß dazu überhaupt ein Element nicht mehr ausreicht.

Als charakteristikfreie Version der Ergebnisse im Char.-0-Fall ist dagegen zu vermuten:

"Die kommutativen polynomialen Identitäten der Stufe n sind genau die Elemente aus $\kappa(\mathfrak{T}^+_{n+1})$!?" (für $M_n(R)$!)

(Dies zu beweisen, ist allerdings noch nicht gelungen.)

Eine Vertauschung in der Reihenfolge der Faktorisierung (erst nach $\mathfrak{T}^+_{n+1}$, dann nach C) ergibt eine äquivalente Vermutung:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n(R\{X_k\}_k) & \xrightarrow{\quad PI'_n \quad} & H_{An} \\ \Big\downarrow \kappa. & & \Big\downarrow \kappa. \\ C(\Gamma_n(R\{X_k\}_k)) & \xrightarrow{\text{inj.!?}} & C(H_{An}) \end{array}$$

In allen Fällen, wo die Vermutung stimmt, die gestrichelte (eindeutig existierende) Abbildung also injektiv ist, kann man darüber hinaus die (üblichen) Polynomidentitäten für $M_n(R)$ als Radikal der Form $\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_k)}:\Gamma_n(R\{X_k\}_k)\longrightarrow C(\Gamma_n(R\{X_k\}_k))$ charakterisieren.

25.1. Für eine C_n-Algebra A über R gilt nach 23.2.7.:

25.1.1. $PI_n(N^{<i>})((a_k)_k^{[grd(N)\cdot i]}) = \kappa_{\Gamma_n(A)}(N(a_k)_k^{[i]}1_A^{[n-i]})$

$(N\in Mo,\ (a_k)_k\in A^{(K)})$

Für $A = End(R^n)$ ergibt sich speziell:

25.1.2. $PI_n(N^{<i>})((a_k)_k^{[grd(N)\cdot i]}) = \phi_{Dn}(N(a_k)_k^{[i]}, {}_A^{[n-i]})$, der Koeffizient bei $(-1)^i X^{n-i}$ im charakteristischen Polynom von $N(a_k)_k$. (Nach 24.1.1. und 18.2. Bem. hinter 18.2.12.)

Damit gilt insbesondere der Satz:

25.1.3.SATZ: Ist R ein Körper der Charakteristik 0, so sind in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}})$ die polynomialen Identitäten der Stufe n für $M_n(R)$ genau die kommutativen Spuridentitäten aus [Proc 76].

BEW.: Die Polynomabbildung von $M_n(R)^{(\mathbb{N})} \cong (End(R^n))^{(\mathbb{N})}$ nach R, die jedem Element $(a_k)_k$ aus $M_n(R)^{(\mathbb{N})}$ das Element $tr(a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_r})$ aus R zuordnet, bestimmt über einem unendlichen Körper (vgl.23.1.6.) genau das Element $PI_n((X_{k_1}X_{k_2}\ldots X_{k_r})^{<1>}) \in \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j(M_n(R)^{(\mathbb{N})}),R)$ (25.1.2.). Ein kommutatives Spurpolynom $P(Tr(X_{i_{11}}X_{i_{12}}\ldots X_{i_{1r_1}}))_1$ heißt in [Pro 76] "kommutative Spuridentität", wenn die Polynomabbildung $(a_k)_k \longmapsto P(tr(a_{i_{11}}a_{i_{12}}\ldots a_{i_{1r_1}}))_1$ von $M_n(R)^{(\mathbb{N})}$ nach R die Nullabbildung ist. Das ist aber nach den bisherigen Überlegungen (vgl. 23.1.6.) äquivalent dazu, daß $P(PI_n((X_{i_{11}}X_{i_{12}}\ldots X_{i_{1r_1}})^{<1>}))_1 \equiv 0$ ist in $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j(M_n(R)^{(\mathbb{N})}),R)$, oder, da PI_n R-Algebra-Hom. ist, zu $PI_n(P((X_{i_{11}}X_{i_{12}}\ldots X_{i_{1r_1}})^{<1>})_1) \equiv 0$, bzw. zu $P((X_{i_{11}}\ldots X_{i_{1r_1}})^{<1>})_1 \in Kern(PI_n)$. $P((X_{i_{11}}X_{i_{12}}\ldots X_{i_{1r_1}})^{<1>})_1$ ist aber gerade das Bild von $P(Tr(X_{i_{11}}X_{i_{12}}\ldots X_{i_{1r_1}}))_1$ unter der Identifikation der Algebra der kommutativen Spurpolynome mit $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}})$ (vgl. 22.1.10.). ■

25.1.4.SATZ: Über einem Körper R der Charakteristik 0 gilt: Die kommutativen polynomialen Identitäten der Stufe n für $\mathrm{End}(R^n) \cong M_n(R)$ bilden genau das Bild $\kappa(\mathfrak{T}^+_{n+1})$ von $\mathfrak{T}^+_{n+1}$ unter der Faktorkommutatorabbildung

$$\kappa: \hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow C(\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}}) = \overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}}) \ .$$

BEW.: Nach [Pro 76] wird das T-Ideal der kommutativen Spuridentitäten in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}})$ erzeugt von einem Element, das man unter Berücksichtigung der Kommutativität und der Relationen für die $X_{i_1}\ldots X_{i_k}^{<1>}$ $(\mathrm{Tr}(X_{i_1}\ldots X_{i_k}))$ nach 21.1.7. mit $\kappa(X_1^{<1>}X_2^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>})$ identifizieren kann. Nach 21.1.17. ist das von $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in\mathbb{N}})$ erzeugte T-Ideal gerade $\mathfrak{T}^+_{n+1}$.

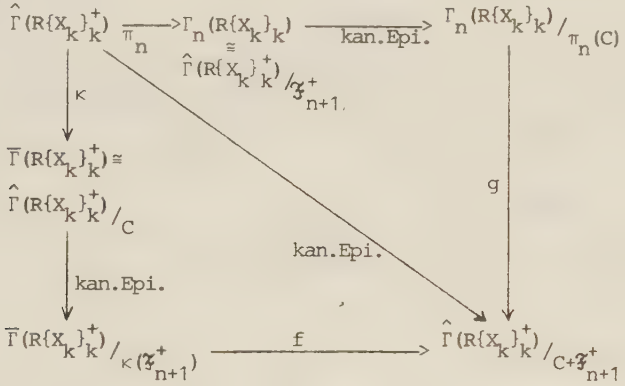
Für eine Familie $(g_i)_i \in R\{X_i\}^+_{i\in\mathbb{N}}$ sei $F((g_i)_i)$ definiert wie für 21.1.12.. $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k) \xrightarrow{F((g_i))} \hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k) \xrightarrow{\kappa} \overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ ist R-Algebra-Hom. und faktorisiert deshalb über $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$. Der resultierende R-Algebra-Hom. ist $C(\kappa\circ F((g_i))$. Die $C(\kappa\circ F((g_i)_i))$ für beliebige g_i liefern genau die "Substitutionen" aus [Pro 76], gegen die ein Ideal abgeschlossen sein muß (in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$), um im dortigen Sinne T-Ideal zu sein. Daher ist klar, daß für ein T-Ideal I in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ das Ideal $\kappa(I)$ in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ ebenfalls ein T-Ideal ist. Weiter ist für ein T-Ideal J in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ das Ideal $\kappa^{-1}(J)$ in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ T-Ideal.

Insbesondere ist also $\kappa(\mathfrak{T}^+_{n+1})$ ein T-Ideal in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$, das $\kappa(X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>})$ enthält. Ist J ein T-Ideal in $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$, das ebenfalls $\kappa(X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>})$ enthält und echte Teilmenge von $\kappa(\mathfrak{T}^+_{n+1})$ ist, so ist $\mathfrak{T}^+_{n+1}\cap\kappa^{-1}(J)$ ein T-Ideal in $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$

das $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ enthält und echte Teilmenge von $\mathfrak{F}_{n+1}^+$ ist. Da $\mathfrak{F}_{n+1}^+$ das von $X_1^{<1>}\ldots X_{n+1}^{<1>}$ erzeugte T-Ideal ist, folgt aus dem Widerspruch die Behauptung. ■

Für beliebige Grundringe R gilt nach 23.2.10., daß PI_n über $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_{\kappa(\mathfrak{F}_{n+1}^+)}$ faktorisiert. Nun hat man aber R-Algebra-Isomorphismen f und g, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

(D_1)



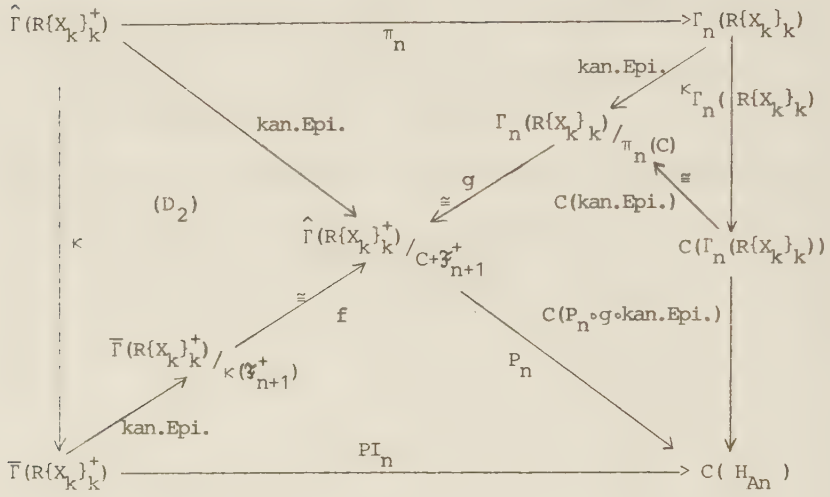
PI_n faktorisiert also auch über $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)/\pi_n(C)$.

Da $g^{-1}\circ f$ ein R-Algebra-Hom. ist, ist diese Algebra kommutativ. Das Ideal I, daß von den Kommutatoren $[x,y]$ mit x,y aus $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ erzeugt wird, liegt also in $\pi_n(C)$. Umgekehrt ist jedes Element von $\pi_n(C)$ Linearkombination von Elementen $\pi_n(a)\tau[\pi_n(b),\pi_n(c)]\tau\pi_n(d)$ mit $a,b,c,d\in\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$ und ist damit in I enthalten.

24.1.5. $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/\kappa(\mathfrak{F}_{n+1}^+) \cong \Gamma_n(R\{X_k\}_k)/\pi_n(C) \cong C(\Gamma_n(R\{X_k\}_k))$

Ist P_n: $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/C+\mathfrak{F}_{n+1}^+ \longrightarrow C(H_{An})$ $\quad (A:=End(R^n))$

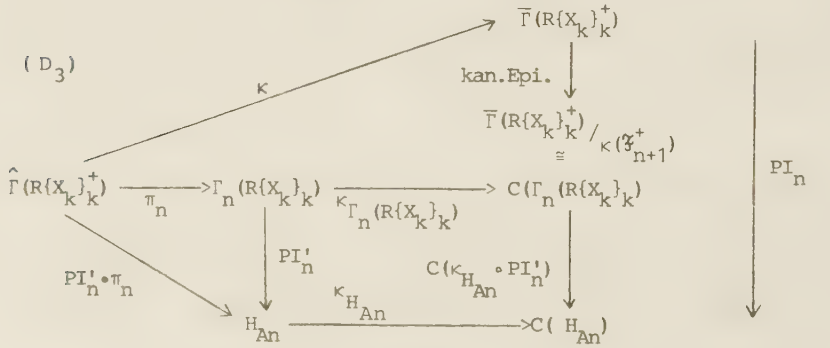
die Faktorisierung von PI_n , so kann man das folgende Kommutative Diagramm aufstellen.



$\kappa_{H_{An}} \circ PI'_n : \Gamma_n(R\{X_k\}_k) \longrightarrow C(H_{An})$ ist R-Algebra-Hom. und faktorisiert daher über $C(\Gamma_n(R\{X_k\}_k))$. Für $\pi_n(a) \in \Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ gilt: $\kappa_{H_{An}} \circ PI'_n(\pi_n(a)) \underset{23.2.8.}{=} PI_n \circ \kappa(a)$ $(\bar{D}_2)$

$= C(P_n \circ g \circ kan.Epi.) \circ \kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_k)}(\pi_n(a))$. Es folgt:

$C(P_n \circ g \circ kan.Epi.) = C(\kappa_{H_{An}} \circ PI'_n)$. Damit wiederum kommutiert:



In (D_3) hat der Isomorphismus $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_{\kappa(\mathfrak{T}_{n+1}^+)} \cong C(\Gamma_n(R\{X_k\}_k)$ die Form $C(\text{kan.Epi.})^{-1} \circ g^{-1} \circ f$ kan.Epi. (vgl. (D_2)).

25.1.6.KOR.: Über einem Körper R der Charakteristik 0 ist für $A:=End(R^n)$ der Homomorphismus

$$C(\kappa_{H_{An}} \circ PI_n'): C(\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow C(H_{An}) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j(A^{(\mathbb{N})}),R)$$

injektiv. ■

25.1.7.SATZ: Die kommutativen polynomialen Identitäten der Stufe n für $End(R^n)$ bilden genau dann das Ideal $\kappa(\mathfrak{T}_{n+1}^+)$, wenn der Homomorphismus

$$P_n : \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_{C+\mathfrak{T}_{n+1}^+} \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j((End(R^n))^{(K)}),R)$$

injektiv ist, oder, äquivalent dazu, wenn $C(\kappa_{H_{An}} \circ PI_n')$ injektiv ist. (R,K bel.!) ■

Es stellt sich also das Problem:

PROBLEM: Ist über einem beliebigen Grundring R und für $K = \mathbb{N}$ oder $K = \underline{m}$ für ein $m\in\mathbb{N}$ der Homomorphismus

$$P_n : \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in K}^+)/_{C+\mathfrak{T}_{n+1}^+} \longrightarrow \bigoplus_j Hom(\Gamma_j(End(R^n))^{(K)},R)$$

(mit $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in K}^+)/_{C+\mathfrak{T}_{n+1}^+} \cong \overline{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in K}^+)/_{\kappa(\mathfrak{T}_{n+1}^+)}$ und $\cong C(\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in K})$)

injektiv?

Aus dem Diagramm (D_3) läßt sich eine weitere Folgerung ziehen:

25.1.8.SATZ: Ist R ein Körper der Charakteristik 0, so bilden die Polynomidentitäten für $End(R^n)$ genau das Radikal der Faktorkommutatorform

$$\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}})} : \Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}) \longrightarrow C(\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}})).$$

Dabei ist das Radikal die Ausartungsmenge Rad_B im Sinne von A.Bergmann, die hier mit der Ausartungsmenge Rad_{MC} im Sinne von McCrimmon zusammenfällt.

BEW.: Nach [Bau 70] gilt für R-Algebren A,B und einen R-Algebra-Hom. $\psi:\Gamma_n(A) \longrightarrow B$:

$Rad_B = \{a\in A \mid \psi(ax^{[i]}1_A^{[n-i]})=0 \ \forall i\in\mathbb{N} \ \forall x\in A\}$ ([Bau 70]§2.2 Sa.1)

$Rad_{MC}= \{a\in A \mid \psi(ax^{[1]}1_A^{[n-1]})=0 \ \forall x\in A\}$.

Es gilt ([Bau 70]§2.3. Satz 2): $Rad_B \subset Rad_{MC}$.

Beh.: Für $\psi=\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}})}$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Polynomident.} & & \\ \cap & & \cup \\ Rad_B & \subset & Rad_{MC} \end{array}$$

1) Polynomid. $\subset Rad_B$

Ist $P\in R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Polynomident., so ist zu zeigen:

$\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_k)}(PQ^{[i]}1_R^{[n-i]}) = 0$ für alle $i\in\underline{n}$ und alle $Q\in R\{X_k\}_k$.

Da $C(\kappa_{H_{An}}\circ PI_n')$ injektiv ist und wegen (D_3), reicht es,

$\kappa_{H_{An}}\circ PI_n'(PQ^{[i]}1_R^{[n-i]}) = 0 \ \forall i\in\underline{n}$ zu zeigen. Über einem unendlichen Körper reicht es weiter, für alle $i\in\underline{n}$ und alle $a_k\in A:=End(R^n)$ $0=\kappa_{H_{An}}\circ PI_n'(PQ^{[i]}1_R^{[n-i]})((a_k)_k^{[i\cdot grd(PQ)]})$ zu zeigen. Nach 23.2.7. und 24.1.1. heißt das:

$\phi_{Dn}(PQ(a_k)_k^{[i]}id_{R^n}^{[n-i]}) = 0$ für alle $i\in\underline{n}$ und $a_k\in A$.

Dies ist aber klar, da $PQ(a_k)_k=0$ ist für alle $a_k\in A$, weil P und damit PQ Polynomidentitäten für A sind.

2) $Rad_{MC} \subset$ Polynomid.

Ist $P \in R\{X_k\}_k \in Rad_{MC}$, so gilt $\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_k)}(PQ^{[1]}{}_1{}^{[n-1]}_R) = 0$ für alle $Q \in R\{X_k\}_k$. Genau wie in 1) ergibt sich daraus $\phi_{Dn}(PQ(a_k)_k^{[1]} id_{R^n}^{[n-1]}) = 0 \quad \forall Q \in R\{X_k\}_k \; \forall a_k \in A$. Speziell gilt dies für X_1, wobei X_1 in P_n nicht auftreten soll. Für ϕ_{Dn} gilt nach 18.2.15, daß $Rad_{MC} = 0$ ist. Damit ist $P(a_k)_k = 0$ für alle $a_k \in A$. P ist also Polynomidentität. ■

25.1.9.BEM.: 1) Nach dem Beweis gilt über jedem unendlichen Körper: $Rad_B(\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}})}) \subset Rad_{MC}(\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}})}) \subset$ Polynomidentitäten für $End(R^n)$.

2) Die Aussage des Satzes bleibt auch in anderen Fällen richtig, wenn nur P_n injektiv ist.

PROBLEM: Gilt über jedem unendlichen Körper $Rad_B(\kappa_{\Gamma_n(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}})}) \supset$ Polynomidentitäten für $End(R^n)$?
(Für n=1 gilt dies trivialerweise!)

KAPITEL 26 : Die Faktoralgebra $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)/_{C+\mathfrak{F}_{n+1}^+}$.

26.1. Einfache Spezialfälle.

Nach den Ergebnissen des letzten Kapitels ist es naheliegend sich die Algebra $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}^+)/_{\kappa(\mathfrak{F}_{n+1}^+)}$ näher anzusehen.

Als erster Schritt sollen die Algebren

$\Gamma(C,m,n) := \hat{\Gamma}(R\{X_k\}_{k\in\underline{m}}^+)/_{C+\mathfrak{F}_{n+1}^+}$ für kleine n und m aus $\mathbb{N}$

betrachtet werden. Die Elemente von $\Gamma(C,m,n)$ werden dabei

in der Schreibweise nicht von denen aus $\Gamma(R\{X_k\}^+_{k\in\underline{m}})$ unterschieden werden.

A) Der Fall $\underline{m=1}$ einer Variablen $X:=X_1$ wurde mit Kap. 16 bereits fast vollständig abgehandelt.

$\Gamma(C,1,n) \cong \Gamma_n(R[X]) \cong R[\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n]$ (16.1.8.).

Es fehlt nur noch eine Ergänzung:

26.1.1.SATZ: Über einem unendlichen Körper ist für $A=End(R^n)$ der R-Algebra-Hom. $P_n: \overline{\Gamma}(R[X]^+)/_{\kappa(\mathfrak{S}^+_{n+1})} \longrightarrow C(H_{An}) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} Hom(\Gamma_j(A),R)$ aus Kap. 25 injektiv.

BEW.: Die Erzeugendenelemente $X^{<i>}$ $(i\in\underline{n})$ von $\Gamma(C,1,n) \cong C(\Gamma_n(R[X]))$ werden abgebildet auf $PI_n(X^{<i>})$. Da R unendlicher Körper ist, können diese Elemente wie auch schon in Kap. 18 mit den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer allgemeinen Matrix $x\in End(R^n)\cong M_n(R)$ identifiziert werden. Diese sind bekanntlich algebraisch unabhängig, da man für diagonalisierbares x gerade die elementarsymmetrischen Funktionen in den Eigenwerten erhält (vgl. 18.2.17.). ■

B) Der Fall $\underline{m=2}$: (Bezeichne die Variablen mit X und Y statt mit X_1,X_2!)

$\underline{n=1}$: $\Gamma(C,2,1)\cong C(\Gamma_1(R\{X,Y\}))\cong C(R\{X,Y\})\cong R[X,Y]$.

$\underline{n=2}$: Jedes Monom aus Mo(X,Y) läßt sich modulo zyklischer Vertauschung darstellen in der Form $XY^{i_1}XY^{i_2}\ldots XY^{i_k}$ mit $k\in\mathbb{N}$ und $i_1,\ldots,i_k\in\mathbb{N}_o$, oder es hat die Form Y^i. Weiter kann nach zyklischer Vertauschung $i_k=\min\{i_1,\ldots,i_k\}$ angenommen werden.

Da in $\Gamma(C,2,2)$ $M^{<1>} = N^{<1>}$ ist und $M^{<2>} = N^{<2>}$, falls N zyklische Permutation von $M \in Mo$ ist, wird $\Gamma(C,2,2)$ als Algebra erzeugt von den Elementen $Y^{i^{<1>}}$, $Y^{i^{<2>}}$, $(XY^{i_1}XY^{i_2}\ldots XY^{i_k})^{<1>}$, $(XY^{i_1}XY^{i_2}\ldots XY^{i_k})^{<2>}$ ($k \in \mathbb{N}$; $i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}_o$; $i_k = \min\{i_1,\ldots,i_k\}$; $i \in \mathbb{N}$). In $\Gamma(C,2,2)$ gilt:

$$(XY^{i_1}XY^{i_2}\ldots XY^{i_k})^{<1>} = (XY^{i_1}\ldots XY^{i_{k-1}})^{<1>}\,\tau\,(XY^{i_k})^{<1>}$$
$$- (XY^{i_1}\ldots XY^{i_{k-1}})^{<1>}(XY^{i_k})^{<1>} \overset{i_1 \geq i_k}{=} (XY^{i_1}\ldots XY^{i_{k-1}})^{<1>}\,\tau\,(XY^{i_k})^{<1>}$$
$$- (XY^{i_k})^{<2>}\,\tau\,(Y^{(i_1-i_k)}XY^{i_2}\ldots XY^{i_{k-1}})^{<1>} +$$
$$+ (XY^{i_k})^{<2>}(Y^{(i_1-i_k)}XY^{i_2}\ldots XY^{i_{k-1}})^{<1>}$$

Da der letzte Summand als Bild eines Elementes aus $\mathfrak{T}_3^+$ verschwindet, bleibt nach einer zyklischen Vertauschung beim 2.Summanden übrig: $(XY^{i_1}\ldots XY^{i_{k-1}})^{<1>}\,\tau\,(XY^{i_k})^{<1>} -$
$(XY^{i_k})^{<2>}\,\tau\,(XY^{i_2}\ldots XY^{i_{k-2}}XY^{(i_{k-1}+i_1-i_k)})^{<1>}$.

Induktiv erhält man:

1) $(XY^{i_1}\ldots XY^{i_k})^{<1>}$ liegt in der R-Subalgebra von $\Gamma(C,2,2)$, die erzeugt wird von den Elementen $(XY^i)^{<j>}$ mit $i \in \mathbb{N}_o$, $j \geq 2$.

Bem.: Die bei der Induktion auftretenden $(XY^i)^{<j>}$ mit $j \geq 3$ verschwinden!

2) Nach 21.1.18. liegt $(XY^i)^{<1>}$ in der R-Subalgebra von $\Gamma(C,2,2)$, die erzeugt wird von $Y^{<1>}$, $Y^{<2>}$, $X^{<1>}$, $XY^{<1>}$

3) Für $z_1,\ldots,z_k \in \{X,Y\}$ gilt in $\Gamma(C,2,2)$:

$$(z_1\ldots z_k)^{<2>} = z_1^{<2>}\,\tau\ldots\tau\,z_k^{<2>}.$$

BEW.: $z_1\ldots z_k^{<2>} = z_1\ldots z_{k-1}^{<2>}\,\tau\,z_k^{<2>}$
$- z_1\ldots z_k^{<1>} z_1\ldots z_{k-1}^{<1>} z_k^{<1>} = z_1\ldots z_{k-1}^{<2>}\,\tau\,z_k^{<2>}$, da der zweite Summand im Bild von $\mathfrak{T}_3^+$ liegt. Die Beh. folgt induktiv.

26.1.2.SATZ: $\hat{\Gamma}(R\{X,Y\}^+)/_{C+\mathfrak{T}_3^+}$ wird als R-Algebra erzeugt von den Elementen $X^{<1>}$, $Y^{<1>}$, $X^{<2>}$, $Y^{<2>}$, $XY^{<1>}$.

26.1.2.BEM.: Wegen $XY^{<1>} = X^{<1>} \tau Y^{<1>} - X^{<1>}Y^{<1>}$ kann das Element $XY^{<1>}$ im Satz auch durch $X^{<1>}Y^{<1>}$ ersetzt werden.

BEW. von 26.1.2.: Die Erzeugenden $Y^{i^{<2>}}$ und $(XY^{i_1}\ldots XY^{i_k})^{<2>}$ lassen sich nach 3) mit den Elementen $X^{<2>}$ und $Y^{<2>}$ gewinnen. Die Elemente $Y^{i^{<1>}}$ und $(XY^{i_1}\ldots XY^{i_k})^{<1>}$ erhält man nach 1) und 2) aus $Y^{<1>}$, $Y^{<2>}$, $X^{<1>}$, $XY^{<1>}$. ∎

26.1.3.SATZ: Ist R ein unendlicher Körper, so ist

$$\hat{\Gamma}(R\{X,Y\}^+)/_{C+\mathfrak{T}_3^+} \cong R[X^{<1>},X^{<2>},Y^{<1>},Y^{<2>},XY^{<1>}] .$$

BEW.: Es reicht von den angegebenen Elementen die algebraische Unabhängigkeit nachzuweisen. Der folgende Satz besagt die algebraische Unabhängigkeit der Bilder dieser Elemente unter einem R-Algebra-Hom.. Die Beh. folgt somit aus 26.1.4. und 26.1.6.. ∎

26.1.4.SATZ: Über einem unendlichen Körper sind die Funktionen tr(x), tr(y), det(x), det(y), tr(xy) von $(\mathrm{End}(R^2))^2$ nach R algebraisch unabhängig.

26.1.5.BEM.: In [For 81] findet sich genauer die Aussage, daß die angegebenen Elemente die Invarianten auf $M_2(R)$ in zwei Variablen frei erzeugen.

BEW. von 26.1.4.: Für Elemente $a_i \in R$ sei

$$0 = \sum_i a_i \, \mathrm{tr}(x)^{i_1} \det(x)^{i_2} \mathrm{tr}(y)^{i_3} \det(y)^{i_4} \mathrm{tr}(xy)^{i_5} =$$

$$= \sum_i a_i \, (x_{11}+x_{22})^{i_1}(x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21})^{i_2}(y_{11}+y_{22})^{i_3}$$

$$(y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21})^{i_4}(x_{11}y_{11}+x_{12}y_{21}+x_{21}y_{12}+x_{22}y_{22})^{i_5}$$

$$=: \sum_i a_i \, f(i) \; .$$

$T_1 := \{i \mid a_i \neq 0\} \neq \emptyset$. Schreibt man f(i) als R- bzw. $\mathbb{Z}$-linearkombination von Monomen in $R[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}]$, so ist der höchste auftretende Grad von x_{12} gerade i_2+i_5.

$T_2 := \{i \in T_1 \mid i_2+i_5 \text{ max.}\}$. Unter den Monomen von f(i) mit $grd_{x_{12}} = i_2+i_5$ tritt y_{21} maximal mit Grad i_4+i_5 auf.

$T_3 := \{i \in T_2 \mid i_4+i_5 \text{ max.}\}$. Unter allen Monomen mit $grd_{x_{12}} = i_2+i_5$ und $grd_{y_{21}} = i_4+i_5$ tritt x_{11} max. mit Grad i_1 auf.

$T_4 := \{i \in T_3 \mid i_1 \text{ max.}\}$. Unter den Monomen mit $grd_{x_{12}} = i_2+i_5$, $grd_{y_{21}} = i_4+i_5$, $grd_{x_{11}} = i_1$ tritt y_{11} max mit Grad i_3 auf.

$T_5 := \{i \in T_4 \mid i_3 \text{ max.}\}$. Das Monom von f(i) ist durch diese Grade eindeutig bestimmt und lautet:

$$x_{11}^{i_1}(x_{12}x_{21})^{i_2}y_{11}^{i_3}(y_{12}y_{21})^{i_4}(x_{12}y_{21})^{i_5} =$$

$$= x_{11}^{i_1} x_{12}^{(i_2+i_5)} x_{21}^{i_2} y_{11}^{i_3} y_{12}^{i_4} y_{21}^{i_4+i_5} \; .$$

Der Koeffizient ist bis auf das Vorzeichen gleich 1.

Für $j \in T_5$ sei $c_1 := j_2+j_5$, $c_2 := j_4+j_5$, $c_3 := j_1$, $c_4 := j_3$, $c_5 := j_2$ und $c_6 := j_4$. In f(j) tritt dann das Monom

$z := x_{11}^{c_3} x_{12}^{c_1} x_{21}^{c_5} y_{11}^{c_4} y_{12}^{c_6} y_{21}^{c_2}$ mit Koeffizient ± 1 auf. Nach Def. von T_5 kann in f(i) das Monom z nur dann auftreten, wenn $i_2+i_5=c_1$, $i_4+i_5=c_2$, $i_1=c_3$, $i_3=c_4$, $i_2=c_5$ und $i_4=c_6$ ist. Man erhält also für die i_k das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat Rang 5, j ist eine Lösung, also die einzige. D.h.: Das Monom z tritt nur in f(j) auf. Da a_j nach Vor. von 0 verschieden ist, folgt die Behauptung. ■

26.1.6.KOR.: Über einem unendlichen Körper R ist für A:= End(R^2) der R-Algebra-Homomorphismus

P_n: $\overline{\Gamma(R\{X,Y\}^+)}/_{\kappa(\mathfrak{S}_3^+)}$ ——> $C(H_{A2}) \cong \oplus_j \mathrm{Hom}(\Gamma_j(A^2),R)$ aus Kap. 25 injektiv.

BEW.: Das Erzeugendensystem $X^{<1>}$, $X^{<2>}$, $Y^{<1>}$, $Y^{<2>}$, $XY^{<1>}$ wird abgebildet auf $PI_2(X^{<1>})$, $PI_2(X^{<2>})$, $PI_2(Y^{<1>})$, $PI_2(Y^{<2>})$, $PI_2(XY^{<1>})$. Da R unendlicher Körper ist können diese Elemente mit tr(x), det(x), tr(y), det(y), tr(xy) identifiziert werden, die nach 26.1.4. algebraisch unabhängig sind. ■

n=3: $\Gamma(C,2,3)$ wird als R-Algebra erzeugt von Elementen $M^{<i>}$ mit $M\in\Omega$ und $i\in\underline{3}$. Es gibt drei Möglichkeiten für M:

1) Y tritt in M nicht auf ==> $M=X^r$

2) X tritt in M nicht auf ==> $M=Y^s$

(In beiden Fällen ist für $i\in\underline{3}$ nach Kap 16. $M^{<i>}\in\Gamma\{\underline{\underline{E_1}}\}$:= die von $\underline{\underline{E_1}}$:=$\{X^{<1>},X^{<2>},X^{<3>},Y^{<1>},Y^{<2>},Y^{<3>}\}$ erzeugte Sub-Algebra von $\Gamma(C,2,3)$.)

3) In M treten X und Y auf. Dann gibt es zyklische Vertauschungen $\overline{M}$ und $\hat{M}$ von M mit $\overline{M} = XY^{i_1}XY^{i_2}\ldots XY^{i_k}$ und $\hat{M} = YX^{j_1}YX^{j_2}\ldots YX^{j_l}$. Dabei sind $k,l \in \mathbb{N}$, die i_p und j_q aus $\mathbb{N}_o$ und $i_1+\ldots+i_k > 0 < j_1+\ldots+j_s$.
In $\Gamma(C,2,3)$ gilt: $\overline{M}^{\langle m\rangle} = M^{\langle m\rangle} = \hat{M}^{\langle m\rangle}$ $(m \in \underline{3})$. Die Indexfolgen $(i_1,\ldots,i_k)$ und $(j_1,\ldots,j_l)$ sind bis auf zyklische Vertauschung eindeutig bestimmt. Es ist deshalb sinnvoll, zu sagen, " X^q tritt in M p-mal auf", wenn unter den j_m $(m \in \underline{l})$ p mal der Wert q auftritt. (Analog für Y)

26.1.7.Beh.: Für alle Monome $M \in Mo$ gilt: $M^{\langle 1\rangle}$ liegt in der R-Subalgebra von $\Gamma(C,2,3)$, die erzeugt wird von E_1 und den Elementen der Form $N^{\langle 1\rangle}$ $(N \in Mo)$ mit:
i) Sowohl X als auch Y treten auf
ii) Weder X^q noch Y^q mit $q \geq 3$ treten auf
iii) X^2 und Y^2 treten jeweils höchstens einmal auf .

BEW. durch Induktion über die Länge $|M|$:
$|M| = 1 \Rightarrow M=X$ oder $M=Y$. $M^{\langle 1\rangle}$ ist dann aus E_1.
Induktionsschritt:
Enthält M X oder Y nicht, so ist $M^{\langle 1\rangle} \in E_1$. Für das Folgende sei daher angenommen, daß sowohl X als auch Y in M auftreten.
Fall 1: In M tritt X^q oder Y^q mit $q \geq 3$ auf, z.B. Y^q (für X^q analog). Dann ist $M^{\langle 1\rangle} = NY^{q\langle 1\rangle}$ mit $N \in Mo$, und nach 21.1.18. liegt dann $M^{\langle 1\rangle}$ in der von E_1 sowie $N^{\langle 1\rangle}$, $NY^{\langle 1\rangle}$, $NY^{2\langle 1\rangle}$ erzeugten Subalgebra. Auf diese letzten Elemente ist aber die Ind.Vor. anwendbar, woraus die Beh. für M folgt.
Fall 2: In M treten X^2 oder Y^2 mindestens zweimal auf, etwa Y^2 (für X^2 analog). M hat dann nach zyklischer Vertauschung

die Form NY^2LY^2 mit $N,L \in Mo$. $M^{<1>} = (NY^2LY^2)^{<1>} =$

$NY^2LY^{<1>} \tau Y^{<1>} - NY^2LY^{<1>}Y^{<1>} = NY^2LY^{<1>} \tau Y^{<1>}$

$- NY^2L^{<1>} \tau Y^{<2>} + NY^2L^{<1>}Y^{<2>}$.

$Y^{<1>}, Y^{<2>} \in E_1$. NY^2LY und NY^2L haben kürzere Länge als M, weshalb die Ind.Vor. auf diese Terme anwendbar ist.

$Z := NY^2L^{<1>}Y^{<2>} = NY^{2\,<1>} \tau L^{<1>}Y^{<2>} - L^{<1>} NY^{3\,<1>} Y^{<1>} -$

$NY^{2\,<1>}_{\ \ <1>} L^{<1>} Y^{<2>}$. Der letzte Summand ist als Bild eines Elements aus $\mathfrak{S}_4^+$ gleich 0.

$Z = NY^{2\,<1>}_{\ \ <1>} \tau L^{<1>} \tau Y^{<2>} - NY^{2\,<1>}_{\ \ <1>} \tau LY^{<1>} Y^{<1>}$

$- L^{<1>} NY^{3\,<1>} \tau Y^{<1>} + LY^{<1>} NY^{3\,<1>} + L^{<1>} NY^{4\,<1>} =$

$= NY^{2\,<1>}_{\ \ <1>} \tau L^{<1>} \tau Y^{<2>} - NY^{2\,<1>}_{\ \ <1>} \tau LY^{<1>} \tau Y^{<1>} +$

$+ NY^{2\,<1>}_{\ \ <1>} \tau LY^{2\,<1>} - L^{<1>} \tau NY^{3\,<1>} \tau Y^{<1>} + LNY^{3\,<1>} \tau Y^{<1>} +$

$+ LY^{<1>} \tau NY^{3\,<1>} - LYNY^{3\,<1>} + L^{<1>} \tau NY^{4\,<1>} - LNY^{4\,<1>}$.

$Y^{<2>} \in E_1$. Mit zwei Ausnahmen ist auf alle Terme die Ind.Vor. anwendbar. Die Ausnahmen sind $LYNY^{3\,<1>}$ und $LNY^{4\,<1>}$.

Nach 21.1.18. liegen diese Elemente in der Subalgebra, die erzeugt wird von E_1 und den Elementen $LYN^{<1>}$, $LYNY^{<1>}$, $LYNY^{2\,<1>}$, $LN^{<1>}$, $LNY^{<1>}$, $LNY^{2\,<1>}$. Auf diese Elemente wiederum ist die Ind.Vor. anwendbar und es folgt die Beh. .■

Welche Monome M erfüllen die Bedingungen (i)-(iii) ?

Sowohl X als auch Y müssen auftreten; X^p, Y^p mit $p \geq 3$ treten nicht auf.

1) X^2 und Y^2 treten nicht auf.

Dann bleibt nur die Möglichkeit $M^{<1>} = (XY)^{i\,<1>}$ mit $i \in \mathbb{N}$.

Nach 21.1.18. liegt dann $M^{<1>}$ in der Subalgebra, die von $XY^{<1>}$, $XY^{<2>}$, $XY^{<3>}$, $XYXY^{<1>}$ und $XY(XY)^{2\,<1>}$ erzeugt wird.

$(XY)^{3^{<1>}} = (XY)^{2^{<1>}} \tau XY^{<1>} - (XY)^{2^{<1>}} XY^{<1>} =$

$= (XY)^{2^{<1>}} \tau XY^{<1>} - XY^{<1>} \tau XY^{<2>} + XY^{<1>} XY^{<2>} =$

$= (XY)^{2^{<1>}} \tau XY^{<1>} - XY^{<1>} \tau XY^{<2>} + 3\, XY^{<3>}.$

$(XY)^{2^{<1>}} = XY^{<1>} \tau XY^{<1>} - 2\, XY^{<2>}.$

Alle in Frage kommenden $M^{<1>}$ liegen also in $\Gamma\{XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}\}$.

2) Y^2 tritt einmal auf, X^2 keinmal.

Dann bleibt nur die Möglichkeit $M^{<1>} = (XY)^i XY^{2^{<1>}}$ mit $i \in \mathbb{N}_o$.

$M^{<1>} = (XY)^{i+1} Y^{<1>} = Y(XY)^{i+1^{<1>}}$. Nach 21.1.18. liegt $M^{<1>}$ dann in $\Gamma\{ XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, Y^{<1>}, YXY^{<1>}, Y(XY)^{2^{<1>}} \}$.

(*) $Y(XY)^{2^{<1>}} = YX^{<1>} \tau YXY^{<1>} - YX^{<1>} YXY^{<1>} =$

$= YX^{<1>} \tau YXY^{<1>} - YX^{<2>} \tau Y^{<1>} + YX^{<2>} Y^{<1>} =$

$= XY^{<1>} \tau XY^{2^{<1>}} - XY^{<2>} \tau Y^{<1>} + Y^{<3>} \tau X^{<2>} - Y^{<2>} YX^{<1>} X^{<1>}$

$- Y^{<3>} X^{<2>}$. Da die beiden letzten Summanden als Bilder von Elementen aus $\mathfrak{Y}_4^+$ verschwinden, erhält man insgesammt:

$M^{<1>} \in \Gamma\{E_1, XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, XY^{2^{<1>}}\}$.

3) X^2 tritt einmal auf, Y^2 keinmal.

Dieser Fall ist symmetrisch zu 2) und man erhält:

$M^{<1>} \in \Gamma\{E_1, XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, YX^{2^{<1>}}\}$.

Mit $\underline{\underline{E_2}} := E_1 \cup \{XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, XY^{2^{<1>}}, YX^{2^{<1>}}\}$ lassen sich die Fälle 1)-3) zu $M^{<1>} \in \Gamma\{E_2\}$ zusammenfassen.

4) X^2 und Y^2 treten auf.

Man erhält: $M^{<1>} = NY^{2^{<1>}}$ mit $N \in Mo$. Für N ergeben sich dabei die Möglichkeiten:

$N_1 = (XY)^i X^2$ mit $i \in \mathbb{N}_o$

$N_2 = (XY)^i X^2 (YX)^j$ mit $i \in \mathbb{N}_o$ und $j \in \mathbb{N}$

$N_3 = X^2(YX)^j$ mit $j \in \mathbb{N}$.

Es gibt keine weiteren Möglichkeiten, da X^2 und Y^2 nur einmal auftreten dürfen.

$N_1Y^{2<1>} = X^2Y^2(XY)^{i<1>} \in \Gamma\{XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, X^2Y^{2<1>}, X^2Y^2XY^{<1>}, X^2Y^2(XY)^{2<1>}\}$ nach 21.1.18. .

$N_2Y^{2<1>} = Y^2(XY)^iX^2(YX)^{j<1>} = Y(YX)^{i+1}(XY)^jX^{<1>} =$

$= (YX)^{i+1}(XY)^{j+1<1>} \in \Gamma\{XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, (YX)^{i+1}(XY)^{p<1>} \; p \in \underline{2}_o\}$

nach 21.1.18. .

Beh.: $(YX)^{i+1<1>} \in \Gamma\{YX^{<1>}, YX^{<2>}, YX^{<3>}\}$ (**)

BEW.: Für i=0 ist nichts zu zeigen.

i>0: $(YX)^{i+1<1>} = (YX)^{i<1>} \tau\, YX^{<1>} - (YX)^{i<1>} YX^{<1>} =$

$= (YX)^{i<1>} \tau\, YX^{<1>} - YX^{<2>} \tau\, (YX)^{i-1<1>}$. Die Behauptung folgt induktiv.

Nach 21.1.18. gilt für p=1,2:

$(YX)^{i+1}(XY)^{p<1>} = (XY)^p(YX)^{i+1<1>} \in \Gamma\{YX^{<1>}, YX^{<2>}, YX^{<3>}, (XY)^p(YX)^{q<1>} \; (q \in \underline{2}_o)\}$

$(XY)^{p<1>} \in \Gamma\{XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}\}$ für p=1,2 (vgl.(**)).

Also gilt: $N_2Y^{2<1>} \in \Gamma\{YX^{<1>}, YX^{<2>}, YX^{<3>}, (XY)^p(YX)^{q<1>} \; (p,q \in \underline{2})\}$.

$N_3Y^{2<1>} = Y^2X^2(YX)^{j<1>} \in$

$\in \Gamma\{YX^{<1>}, YX^{<2>}, YX^{<3>}, Y^2X^2(YX)^{q<1>} \; (q \in \underline{2}_o)\}$.

Die Unterfälle von 4) lassen sich zusammenfassen zu

$M^{<1>} \in \Gamma\{E_3\}$ mit $E_3 := E_2 \cup \{X^2Y^{2<1>}, X^2Y^2XY^{<1>}, X^2Y^2(XY)^{2<1>}, Y^2X^2YX^{<1>}, Y^2X^2(YX)^{2<1>}, (XY)^p(YX)^{q<1>} \; (p,q \in \underline{2})\}$.

$$(XY)^p(YX)^{q\,<1>} = \begin{cases} XYYX^{<1>} = X^2Y^{2\,<1>} & \text{für } p=q=1 \\ XYYXYX^{<1>} = X^2Y^2XY^{<1>} & \text{für } p=1,\ q=2 \\ XYXYYX^{<1>} = Y^2X^2YX^{<1>} & \text{für } p=2,\ q=1 \\ XYXYYXYX^{<1>} = YXY^2XYX^{2\,<1>} & \text{für } P=q=2 \end{cases}$$

$Y^2X^2(YX)^{2\,<1>} = YXX(YX)(YX)Y^{<1>} = YX(XY)^{3\,<1>} \in \Gamma\{XY^{<1>}, XY^{<2>}, XY^{<3>}, X^2Y^{2\,<1>}, Y^2X^2YX^{<1>}\}$ nach 21.1.18. .

$X^2Y^2(XY)^{2\,<1>} = XY(YX)^{3\,<1>} \in \Gamma\{YX^{<1>}, YX^{<2>}, YX^{<3>}, X^2Y^{2\,<1>}, X^2Y^2XY^{<1>}\}$ nach 21.1.18. .

Damit kann man nun E_3 reduzieren zu

$\underline{E_4} := E_2 \cup \{X^2Y^{2\,<1>}, X^2Y^2XY^{<1>}, Y^2X^2YX^{<1>}, YXY^2XYX^{2\,<1>}\}$ und erhält für alle Fälle 1) - 4)

$M^{<1>} \in \Gamma\{E_4\}$.

Weiter gilt für $M,N \in Mo$:

$$MN^{<2>} = M^{<2>} \tau N^{<2>} - MN^{<1>}M^{<1>}N^{<1>} + M^{<2>}N^{<2>} =$$

$$= M^{<2>} \tau N^{<2>} - MN^{<1>}M^{<1>} \tau N^{<1>} + MN^{2\,<1>\,<1>}M + 2\,MN^{<2>}$$

$$\Longrightarrow MN^{<2>} = MN^{<1>}M^{<1>} \tau N^{<1>} - M^{<2>} \tau N^{<2>} - MN^{2\,<1>\,<1>}M =$$

$$= MN^{<1>} \tau M^{<1>} \tau N^{<1>} - MNM^{<1>} \tau N^{<1>} - M^{<2>} \tau N^{<2>} - MN^{2\,<1>} \tau M^{<1>} + MN^2M^{<1>} .$$

Induktion über $|L|$ liefert somit: $L^{<2>} \in \Gamma\{E_4\}$ $\forall L \in Mo$.

$MN^{<3>} = M^{<3>} \tau N^{<3>}$. Per Induktion über $|L|$ folgt wieder $L^{<3>} \in \Gamma\{E_4\}$ $\forall l \in Mo$.

Weiter läßt sich $XY^{<3>} \in E_2$ ausdrücken durch $XY^{<3>} = X^{<3>} \tau Y^{<3>}$.

Ergebnis: $\Gamma(C,2,3) = \Gamma\{E_4 - \{XY^{<3>}\}\}$.

An diesem Resultat lassen sich noch zwei Verbesserungen vornehmen:

i) $E_4 \ni X^2Y^{2^{<1>}} = X^2Y^{<1>} \tau Y^{<1>} - X^2Y^{<1>}Y^{<1>} = X^2Y^{<1>} \tau Y^{<1>}$
$- X^{<1>} \tau XY^{<1>}Y^{<1>} + XY^{<1>}XY^{<1>} + X^{<1>}XY^{<1>}Y^{<1>} =$
$= X^2Y^{<1>} \tau Y^{<1>} - X^{<1>} \tau XY^{<1>} \tau Y^{<1>} + X^{<1>} \tau XY^{2^{<1>}} + 2\, XY^{<2>}$
$+ X^{<2>} \tau Y^{<2>} - XY^{<2>} - X^{<2>}Y^{<2>}$. Da der letzte Summand 0 ist liest man ab:

$X^2Y^{2^{<1>}} \in \Gamma\{E_5\}$ mit $E_5 = E_4 - \{XY^{<3>}, X^2Y^{2^{<1>}}\}$.

ii) $z := X^{<1>}\, XY^{2^{<1>}}\, XY^{<1>} =: x_1^{<1>}x_2^{<1>}x_3^{<1>} = x_1^{<1>} \tau x_2^{<1>} \tau x_3^{<1>}$
$- x_1x_2^{<1>} \tau x_3^{<1>} - x_1x_3^{<1>} \tau x_2^{<1>} - x_2x_3^{<1>} \tau x_1^{<1>} + x_1x_2x_3^{<1>}$
$+ x_1x_3x_2^{<1>}$ nach 21.1.7. .

$z = X^{<1>} \tau XY^{2^{<1>}} \tau XY^{<1>} - X^2Y^{2^{<1>}} \tau XY^{<1>} - X^2Y^{<1>} \tau XY^{2^{<1>}}$
$- XY^2XY^{<1>} \tau X^{<1>} + X^2Y^2XY^{<1>} + X^2YXY^{2^{<1>}}$.

Mit $X^{<1>}\, XY^{2^{<1>}}\, XY^{<1>} = X^{<3>} \tau Y^{2^{<1>}}\, Y^{<1>}$ (die anderen Summanden sind 0!) und (*) aus 2) kann man, wenn man auch noch i) benutzt, $X^2Y^2YX^{<1>}$ durch andere Elemente von E_5 ausdrücken.

<u>26.1.8.SATZ:</u> $\hat{\Gamma}(R\{X,Y\}^+)/_{C+\mathfrak{S}_4^+}$ ist als R-Algebra endlich erzeugt, mit dem 12-elementigen Erzeugendensystem

$\{X^{<1>}, X^{<2>}, X^{<3>}, Y^{<1>}, Y^{<2>}, Y^{<3>}, (XY)^{<1>}, (XY)^{<2>}, (XY^2)^{<1>},$
$(YX^2)^{<1>}, (X^2Y^2XY)^{<1>}, (YXY^2XYX^2)^{<1>}\}$. ■

Offen ist, ob dieses Erzeugendensystem minimal ist oder gar algebraisch unabhängig.

Vollends unübersichtlich wird die Situation für $n \geq 4$. Die starke Verzweigung und große Anzahl der zu betrachtenden Fälle entzieht sich noch der Behandlung, da eine Systematik, etwa ein Induktionsansatz von den Fällen n=1,2,3 her, bisher fehlt.

26.2. Führt auch der konstruktive Ansatz im Spezialfall nicht allzuweit, so läßt sich dennoch eine Aussage über den allgemeinen Fall machen:
$\Gamma(C,m,n)$ ist als Algebra stets endlich erzeugt.
Bevor jedoch dieses Ergebnis als Satz formuliert und bewiesen wird, müssen einige Vorarbeiten geleistet werden.

Für $i \in \mathbb{N}_0$ bezeichne S(i) wie in 21.1.10. die Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$, die erzeugt wird von den Elementen $M^{<j>}$ mit $M \in Mo$ und $j \in \underline{i}$.

26.1.1.HILFSSATZ: Für alle $M,N \in Mo$ und $j,l \in \mathbb{N}_0$, sowie $n,\alpha \in \mathbb{N}$ gilt: Sind die Bedingungen

(i) $\mathbb{N}_0 \ni i_1,\ldots,i_l \leq j$

(ii) $\mathbb{N}_0 \ni \alpha_1,\ldots,\alpha_l \leq k$

(iii) $\alpha_r = k$ für höchstens ein $r \in \underline{l}$

(iv) $\min\{i_r \mid r \in \underline{l}\} \geq n-\alpha-\sum_{r \in \underline{l}} \alpha_r + 1$

erfüllt, dann liegt das Element $(MN^{i_1})^{<\alpha_1>}\ldots(MN^{i_l})^{<\alpha_l>}N^{<\alpha>}$ modulo $\mathfrak{S}_{n+1}^+$ in der von S(k-1) und den Elementen $N^{<k>},N^{<k+1>},\ldots,N^{<n>},M^{<k>},MN^{<k>},\ldots,(MN^{j-1})^{<k>}$ erzeugten R-Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}_k^+)$.
Ist $M=1_{R\{X_k\}_k}$, so bleibt die Aussage richtig, wenn man bei den Erzeugenden $M^{<k>}$ streicht.

BEW.: M sei zunächst aus Mo. Es soll eine Induktion über $s:=n+1-(\alpha+\sum_{r\in\underline{l}}\alpha_r)$ geführt werden. Ist $s\leq 0$, so ist das betrachtete Element wegen $\alpha+\sum_r \alpha_r \geq n+1$ aus $\mathfrak{F}^+_{n+1}$.

$0<s \longrightarrow s+1$: (Wegen (iv) ist $i_r>0$ $\forall r\in\underline{l}$!)

$$(MN^{i_1})^{<\alpha_1>}\ldots(MN^{i_l})^{<\alpha_l>}N^{<\alpha>}=(MN^{i_1})^{<\alpha_1>}\ldots(MN^{i_l})^{<\alpha_l>}\tau N^{<\alpha+\sum\alpha_r>}$$

$$-\sum_{\substack{(\alpha_{r1}+\alpha_{r2}=\alpha_r)_r\\ \alpha+\Sigma\alpha_r=\beta+\Sigma\alpha_{r1}\\ \beta>\alpha}}\Big(\prod_{r\in\underline{l}}(MN^{i_r})^{<\alpha_{r1}>}\Big)\Big(\prod_{r\in\underline{l}}(MN^{i_r-1})^{<\alpha_{r2}>}\Big)N^{<\beta>}.$$

Für die Glieder der Summe gilt: $\min_{r\in\underline{l}}\{i_r,i_r-1\}=(\min_{r\in\underline{l}}\{i_r\})-1$

$$\underset{(iv)}{\geq} n-\alpha-\sum_{r\in\underline{l}}\alpha_r = n-\alpha-\sum_r(\alpha_{r1}+\alpha_{r2}) > n-\beta-\sum_r(\alpha_{r1}+\alpha_{r2}) .$$

Damit ist die Ind.Vor. anwendbar, und es bleibt zu zeigen, daß $(MN^{i_1-1})^{<\alpha_1>}\ldots(MN^{i_l-1})^{<\alpha_l>}$ in der behaupteten Subalgebra liegt. Nach 9.2.4. ist dies klar, falls $\alpha_r<k$ $\forall r\in\underline{l}$. Andernfalls sei etwa $\alpha_1=k$:

$$(MN^{i_1-1})^{<\alpha_1>}\ldots(MN^{i_l-1})^{<\alpha_l>}=$$

$$=(MN^{i_1-1})^{<\alpha_1>}\ldots(MN^{i_{l-1}-1})^{<\alpha_{l-1}>}\tau(MN^{i_1-1})^{<k>}$$

$$-\sum_{\substack{(\alpha_{r1}+\alpha_{r2}=\alpha_r)_r\\ \beta+\Sigma\alpha_{r1}=k;\ \beta<k}}(MN^{i_1-1})^{<\beta>}\prod_{r\in\underline{l-1}}(MN^{i_r-1}MN^{i_1-1})^{<\alpha_{r1}>}\prod_{r\in\underline{l-1}}(MN^{i_r-1})^{<\alpha_{r2}>}.$$

Da nach Vor. (ii),(iii) $\alpha_r<k$ $\forall r\in\underline{l-1}$ und nach Vor. (i) $i_1-1\leq j-1$ ist, folgt die Behauptung für $M\in Mo$.

Ist M=1, so kann man den Beweis vollkommen analog führen, wenn $i_r>1$ ist für alle $r\in\underline{l}$. Andernfalls faßt man

$(MN^{i_r})^{<\alpha_r>} = N^{i_r<\alpha_r>} = N^{<\alpha_r>}$ für alle i_r gleich 1 mit $N^{<\alpha>}$ zusammen. Der dabei entstehende Binomialkoeffizient ist ohne Bedeutung. Für $i_r \geq 2$ ist

$(MN^{i_r})^{<\alpha_r>} = N^{i_r<\alpha_r>} = (NN^{i_r-1})^{<\alpha_r>}$. Man kann dann den bereits bewiesenen Teil des Hilfssatzes mit M=N, j-1 statt j und kleinerem l auf das modifizierte Ausgangselement anwenden. Die Vorraussetzungen (i)-(iii) sind trivialerweise erfüllt. (iv) ist ebenfalls erfüllt, da $\min_{r \in \underline{l}}\{i_r\} = 1$ war. ■

26.2.2.LEMMA: Für alle M,N∈Mo und j,k∈ℕ$_0$ liegt $(MN^j)^{<k>}$ modulo $\mathfrak{F}^+_{n+1}$ in der R-Subalgebra von $\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$, die erzeugt wird von den Elementen $L^{<l>}$ mit L∈Mo und l<k sowie den Elementen $M^{<k>}, MN^{<k>}, \ldots, (MN^{n-k})^{<k>}$.
Die Aussage bleibt richtig, falls man $M=1_{R\{X_k\}_k}$ setzt und das erzeugende Element $M^{<k>}$ streicht.

BEW.: Für j≤n-k ist die Beh. klar, ebenfalls für k>n. Sei also j>n-k≥0:

$$(MN^j)^{<k>} = (MN^{j-1})^{<k>} \tau N^{<k>} - \sum_{i \in \underline{k-1}_0} (MN^j)^{<i>} (MN^{j-1})^{<k-i>} N^{<k-i>}.$$

$n+1-(i+k-i+k-i) = n-k-(k-i-1) \leq n-k \leq j-1$ für alle $i \in \underline{k-1}_0$. Damit folgt aus dem Hilfssatz, daß $(MN^j)^{<k>}$ in der R-Subalgebra liegt, die erzeugt wird von $(MN^{j-1})^{<k>}$, $N^{<k>}$ und $S(k-1)$ sowie $N^{<k>}, \ldots, N^{<n>}, MN^{<k>}, \ldots, (MN^{j-1})^{<k>}$ und $M^{<k>}$, falls M∈Mo ist. Die Behauptung folgt durch Induktion über j. ■

BEM.: Das Lemma enthält 21.1.18. als Spezialfall.

Sei jetzt $(1,2,\ldots,l)\neq\sigma$ zyklisch (spez. $\sigma\neq id$!).

$w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(l)} > w_1\cdots w_l$ falls $l=n+1$ ist. Falls $l=n+2$ ist, sei $\sigma(i)=l$. Dann gilt:

(*) $w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(l)}^{<k>} = w_{\sigma(i+1)}\cdots w_{\sigma(l)}w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(i-1)}w_l^{<k>} =$

$= aw_{\sigma(i+1)}\cdots w_{\sigma(l)}w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(i-1)}b^{<k>}$.

Für $\rho:=\begin{pmatrix} 1 & \ldots\ldots & l-i & l-i+1 \ldots\ldots & l-1 \\ \sigma(i+1) & \ldots\ldots \sigma(l) & \sigma(1) & \ldots\ldots \sigma(i-1) & \end{pmatrix}$ gilt: $\rho\neq id$,

da sonst $w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(l)}$ zyklische Permutation von $w_1\ldots w_l$ wäre (vgl.(*)) und damit $\sigma=(1,2,\ldots,l)$. Widerspruch!

Somit ergibt sich: $w_{\rho(1)}\cdots w_{\rho(l-1)} > w_1\cdots w_l$ und damit $aw_{\rho(1)}\cdots w_{\rho(l-1)}b > aw_1\cdots w_lb = N$.

$N^{<k>}$ liegt also in der Subalgebra, die erzeugt wird von Y und Elementen $N'^{<k>}$, mit $N':=aw_{\rho(1)}\cdots w_{\rho(l-1)}b > N$ Permutation von N (ρ geeignet).

Dieses Verfahren kann auf die N' erneut angewendet werden und endet, da es nur endlich viele Permutationen von N gibt, mit einer Permutation von N, die keinen $n+1-\{X_1,\ldots,X_m\}$ dividierten Faktor besitzt. Beh. 3 ist damit bewiesen.

Da Permutationen von N die gleiche Länge haben wie N, folgt nach 26.2.3.:

$N^{<k>}$ liegt in der R-Subalgebra, die erzeugt wird von Y und Elementen N' mit

1) $|N'| = |N|$

2) N' hat keinen $n+1-\{X_1,\ldots,X_m\}$-dividierten Faktor

3) $N' = ab^nc$ mit $b\in Mo$ und $a,c\in Mo\cup\{1\}$.

Fall 2: N enthält keinen $n+1-\{X_1,\ldots,X_m\}$-dividierten Faktor aber $N=ab^nc$ mit $b\in Mo$ und $a,c\in Mo\cup\{1\}$.

Um den Beweis von Beh.2 und damit von Beh.1 abzuschließen, reicht es demnach, Beh.4 zu zeigen.

Beh.4: N enthält keinen $n+1-\{X_1,\ldots,X_m\}$-dividierten Faktor, läßt sich aber darstellen als $N = ab^nc$ mit $b \in Mo$ und a,c aus $Mo \cup \{1\} \Longrightarrow N^{<k>} \in R[Y]$.

Bew. der Beh.4: Ohne Einschränkung kann b von minimaler Länge gewählt werden. Dann kann b weder einen $n+1-\{X_1,\ldots,X_m\}$-dividierten Faktor enthalten, da dies dann auch für N der Fall wäre, noch kann b einen Faktor haben, der n-te Potenz ist, da dies im Widerspruch zur Minimalität von $|b|$ stände. Nach 26.2.3. folgt dann: $|b| < N(m,n,n+1)$.
$b^{<i>}$ ist also in Y für alle $i \in \underline{n}$. $N^{<k>} = cab^{n^{<k>}}$ liegt nach 26.2.2. modulo $\mathfrak{F}^+_{n+1}$ in der R-Subalgebra, die erzeugt wird von S(k-1) und den Elementen $b^{<k>},\ldots,b^{<n>},cab^{<k>},\ldots,cab^{n-k^{<k>}}$ und $ca^{<k>}$, falls $|ca| > 0$ ist. $ca^{<k>},cab^{<k>},\ldots,cab^{n-k^{<k>}}$ liegen nach Ind.Vor. für $|N|$ in $R[Y]$, da $k>0$ ist. $b^{<k>},\ldots,b^{<n>}$ liegen nach Obigem in $R[Y]$. Nach Ind.Vor. für k liegt S(k-1) in $R[Y]$. Damit ist alles bewiesen. ■

Die bisherigen Ergebnisse über $\hat{T}(R\{X_k\}^+_k)/_{C+\mathfrak{F}^+_{n+1}}$ reichen noch nicht aus, um das Problem der Polynomidentitäten charakteristik-frei zu lösen. Vielmehr ist es wünschenswert zu zeigen, daß diese Algebra als R-Modul frei ist mit expliziter Angabe einer Basis. Dann könnte man hoffen, die Injektivität von P_n aus Kap. 25 zu beweisen (oder auch zu widerlegen!).

A N H Ä N G E

A.I. Ein Hilfssatz zu Isomorphismen freier Moduln .

A.I.1.SATZ: M und N seien freie R-Moduln mit Basen $\{m_i\}_{i\in I}$ bzw. $\{n_j\}_{j\in J}$ mit totalgeordneten Indexmengen I und J.
F: M ——> N sei ein R-Modul-Hom. mit folgender Eigenschaft:
Es existiert eine surjektive ordnungserhaltende Abbildung
f:I ——> J, so daß

(*) $\forall i\in I: \quad F(m_i) = n_{f(i)} + \sum_{j<f(i)} \alpha_{ji} n_j$

mit $\alpha_{ji}\in R$, fast alle 0.
Dann ist F injektiv.
Ist J sogar wohlgeordnet, so ist F ein Isomorphismus.

BEW.: 1) Annahme: $F(\sum_{k\in\underline{l}} a_k m_{i_k}) = 0$ mit $a_k\in R$, $i_k\in I$, sowie o.E. $i_1 > i_k \ \forall k<1$ und $a_1 \neq 0$.

$$0 = F(\sum_{k\in\underline{l}} a_k m_{i_k}) = \sum_{k\in\underline{l}} a_k F(m_{i_k}) \overset{(*)}{=}$$

$$= \sum_{k\in\underline{l}} a_k \Big(n_{f(i_k)} + \sum_{j<f(i_k)} \alpha_{ji_k} n_j \Big) \overset{f \text{ ordnungserh.}}{=}$$

$$= a_1 n_{f(i_1)} + \text{Linearkombination von Elementen } n_j \text{ mit } j<f(i_1).$$

Da $\{n_j\}_{j\in J}$ Basis ist, folgt $a_1=0$ und damit ein Widerspruch.
Also ist F injektiv.

2) $j\in J$ sei beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es ein $i\in I$, so daß $f(i)=j$ ist. $F(m_i) = n_{f(i)} + \sum_{k<f(i)} \alpha_{ki} n_k = n_j + \sum_{k<j} \alpha_{ki} n_k$.

Gilt $n_k\in \mathrm{Im}(F) \ \forall k<j$, so folgt $F(m_i) = n_j + \sum_{k<j} \alpha_{ki} F(x_k)$ mit $x_k\in M$.
Dann ist $n_j = F(m_i - \sum_{k<j} \alpha_{ki} x_k) \in \mathrm{Im}(F)$.

Nach dem Prinzip der transfiniten Induktion ist F damit surjektiv. ■

A.I.2.BEM.: a) In den Anwendungen von Satz A.I.1. in dieser Arbeit wird die Wohlornung von J meist dadurch erreicht, daß J zerlegt wird als $= \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N} \text{ (bzw. } \mathbb{N}_0)} J_k$, wobei die J_k als wohlgeordnet angenommen werden (Jede Menge läßt sich wohlordnen.), und $J_k < J_l$ ($j_k<j_l$ $\forall j_k\in J_k$, $j_l\in J_l$) definiert wird, falls k<l ist.
Dieses Vorgehen kann auf die J_k erneut angewendet werden.
b) Ist X das von den Buchstaben X_i ($i\in\mathbb{N}$ oder $i\in\mathbb{N}_0$) erzeugte Monoid, so ist jede Teilmenge mit beschränkter Wortlänge bzgl. der lexikographischen Ordnung wohlgeordnet.

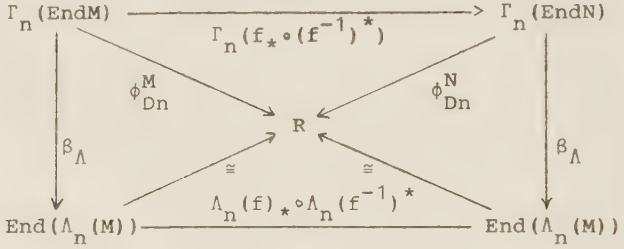
A.II. Die Determinante für endlich-erzeugt projektive Moduln M als Algebra-Homomorphismus $\phi_D^M: \hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$.

Was in Kapitel 18 für endlich-dimensionale freie R-Moduln dargestellt wurde, soll hier für beliebige endlich-erzeugt projektive Moduln M gemacht werden. Ein R-Algebra-Homomorphismus $\phi_D^M: \hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$ soll konstruiert und charakterisiert werden, der die "Goldman-Determinante" ([Goldm 61]) in gleicher Weise repräsentiert, wie ϕ_D die klassische Determinante. Als eine Anwendung erhält man für Algebren der Form $\hat{\Gamma}(A)$ "Charaktere" der Darstellungen auf endlich-erzeugt projektiven R-Moduln , die R-Algebra-Hom. sind.

Mit $\phi_D:\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$ wurde bisher die Determinante für einen freien endlich-dimensionalen R-Modul M bezeichnet, mit $\phi_{Dn}:\hat{\Gamma}_n(\mathrm{End}M) \longrightarrow R$ die homogene Determinante. Für das Folgende ist es nötig genauer $\underline{\underline{\phi_D^M}}:=\phi_D$ und $\underline{\underline{\phi_{Dn}^M}}:=\phi_{Dn}$ oder sogar, falls der Grundring betont werden soll, $\underline{\underline{\phi_D^{MR}}}:=\phi_D$ und $\underline{\underline{\phi_{Dn}^{MR}}}:=\phi_{Dn}$ zu schreiben.

1) Sind M und N zwei zu R^n isomorphe R-Moduln, und ist $f:M \longrightarrow N$ ein R-Modul-Isom. zwischen ihnen, so kommutiert folgendes Diagramm in R-ALG.:

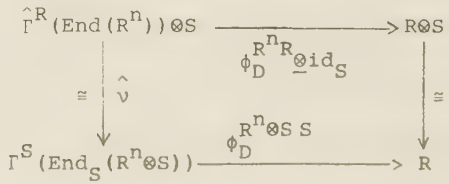
(D_1)



Das äußere Rechteck kommutiert nach 17.1.3., die beiden seitlichen Dreiecke nach Def. von ϕ_{Dn} (18.2.3.). Das untere Dreieck kommutiert, da es nur einen R-Algebra-Hom. von $\mathrm{End}(\Lambda_n(M)) \cong R$ nach R gibt.
Es folgt die Kommutativität des oberen Dreiecks.

2) Für jede kommutative R-Algebra S kommutiert folgendes Diagramm in S-ALG:

(D_2)



BEW.: Da alle Abbildungen S-Algebra-Hom. sind, reicht es, $e_{ij}^{<k>} \otimes 1_S$ zu betrachten.

$\phi_D^{R^n R} \underline{\otimes} id_S\ (e_{ij}^{<k>} \otimes 1_S) = \phi_D^{R^n R}(e_{ij}^{<k>}) \otimes 1_S =$

$= (\delta_{k0}+\delta_{k1}\delta_{ij})1_R \otimes 1_S \longmapsto (\delta_{k0}+\delta_{k1}\delta_{ij})1_S = \phi_D^{R^n \otimes S\, S}(e_{ij}^{<k>})$. Der Rest ist klar. ■

Nach 12.2.(D_2) und 18.2.11. kommutiert dann auch

(D_3)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n^R(\mathrm{End}(R^n))\otimes S & \xrightarrow{\phi_{Dn}^{R^n R} \underline{\otimes} id_S} & R\otimes S \\ \cong \downarrow \nu^{RS} & & \downarrow \cong \\ \phi_n^S(\mathrm{End}_S(R^n \otimes S)) & \xrightarrow{\phi_{Dn}^{S^n S}} & R \end{array}$$

Mit 1) überlegt man sich, daß die Diagramme (D_2) und (D_3) gültig bleiben, wenn man R^n durch einen dazu isomorphen Modul M ersetzt. (Die angegebenen Isomorphismen sind nat. Transf..)

3) Folgendes Diagramm kommutiert:

(D_4)
$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^m))\otimes\hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^n)) & \xrightarrow[9.1.15.]{\hat{\xi}} & \hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^m)\oplus\mathrm{End}(R^n)) \\ & & \downarrow \hat{\Gamma}(\iota) \\ & & \hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^m \oplus R^n)) \\ \downarrow \phi_D^{R^m} \underline{\otimes} \phi_D^{R^n} & & \hat{\Gamma}(\mathrm{End}(R^{m+n})) \\ & & \downarrow \phi_D^{R^{m+n}} \\ R\otimes R & \xrightarrow{\mu_R} & R \end{array}$$

ι soll dabei der durch $(f,g) \longmapsto ((x,y) \longmapsto (f(x),g(y)))$ für alle $f \in \mathrm{End}(R^m)$, $g \in \mathrm{End}(R^n)$ definierte R-Algebra-Hom.

sein. f⊕g bezeichne das Bild von (f,g).

BEW. der Kommutativität von (D_4): Da es sich um R-Algebra-Homomorphismen handelt, reicht es, $e_{ij}^{<r>} \otimes e_{kl}^{<s>}$ zu betrachten.

a) Rechtsherum: $e_{ij}^{<r>} \otimes e_{kl}^{<s>} \longmapsto (e_{ij},0)^{<r>}(0,e_{kl})^{<s>} \xmapsto[\hat{\Gamma}(\iota)]{}$

$(e_{ij}\oplus 0)^{<r>}(0\oplus e_{kl})^{<s>} \longmapsto e_{ij}^{<r>} e_{k+ml+m}^{<s>} \underset{j\in m;\ k>0}{=}$

$= e_{ij}^{<r>} \tau e_{k+ml+m}^{<s>} \longmapsto (\delta_{r0}+\delta_{r1}\delta_{ij})(\delta_{s0}+\delta_{s1}\delta_{kl})$

b) Linksherum: $e_{ij}^{<r>} \otimes e_{kl}^{<s>} \longmapsto (\delta_{r0}+\delta_{r1}\delta_{ij})\otimes(\delta_{s0}+\delta_{s1}\delta_{kl})$

$\longrightarrow (\delta_{r0}+\delta_{r1}\delta_{ij})(\delta_{s0}+\delta_{s1}\delta_{kl})$. ∎

Aus der Definition von $\hat{\xi}$ und der Tatsache, daß die Projektionen π_m und π_n Epimorphismen sind, erhält man mit (D_4) auch die Kommutativität von

(D_5)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_m(\mathrm{End}(R^m))\otimes\Gamma_n(\mathrm{End}(R^n)) & \xrightarrow[\xi]{} & \Gamma_{m+n}(\mathrm{End}(R^m)\oplus\mathrm{End}(R^n)) \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_{Dm}^{R^m}\otimes\phi_{Dn}^{R^n}} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{m+n}(\iota)} \\
R\otimes R & \xrightarrow[\mu_R]{} R \xleftarrow[\phi_D^{R^{m+n}}]{} & \Gamma_{m+n}(\mathrm{End}(R^{m+n})) \\
 & \quad {\scriptstyle \phi_{Dm+n}^{R^m\oplus R^n}} \nearrow & \cong \\
 & & \Gamma_{m+n}(\mathrm{End}(R^m\oplus R^n))
\end{array}$$

(Das Dreieck rechts unten kommutiert nach 1))

Mit 1) erhält man, da ξ, $\hat{\xi}$ nat. Transf. sind, daß (D_4) und (D_5) gültig bleiben, wenn man R^m durch einen isomorphen Modul M und R^n durch einen isomorphen Modul N ersetzt.

Damit sind alle benötigten Hilfsmittel für den folgenden Abschnitt bereitgestellt.

4)

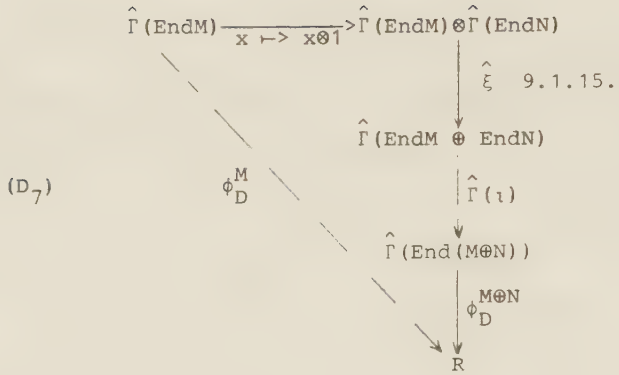
A.II.1.DEF.: M sei ein endlich-erzeugt projektiver R-Modul. Dann heißt ein R-Algebra-Hom. $\psi:\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow B$ "lokal homogen" :<==> Für alle maximalen Ideale m in R existiert ein R_m-Algebra-Hom. χ_m, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$(D_6)\qquad \begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}^R(\mathrm{End}_R M)\otimes_R R_m & \xrightarrow{\ \psi\otimes id_{R_m}\ } & B\otimes R_m \\ \cong\downarrow & & \uparrow \chi_m \\ \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_R M\otimes_R R_m) & & \\ \cong\downarrow & & \\ \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m)) & \xrightarrow[\pi_{\mathrm{rang}_m M}]{} & \Gamma^{R_m}_{\mathrm{rang}_m M}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m)) \end{array}$$

A.II.2.SATZ: Für alle kommutativen R-Algebren B und für alle endlich-erzeugt projektiven R-Moduln M existiert genau ein lokal homogener R-Algebra-Hom. $\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) \longrightarrow B$.

BEW.: Eindeutigkeit: Ist $\mathrm{rang}_m M =: n$, also $M\otimes R_m \cong R_m^n$, so existiert nach 24.1.1. genau ein R-Algebra-Hom. $\chi_m:\Gamma_n^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m)) \longrightarrow B\otimes R_m$. Sind ψ_1, ψ_2 zwei lokal homogene R-Algebra-Hom., so gilt, wenn $f_m:B \longrightarrow B\otimes R_m$ der kan. Hom. ist: $f_m\circ\psi_1(x) = \psi_1\otimes id_{R_m}(x\otimes 1_{R_m}) = \chi_m\circ\pi_n(x\otimes 1_{R_m}) =$ analog $= f_m\circ\psi_2(x)$. Da dies für alle $x\in\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M)$ gilt, stimmen nach [Goldm 61] Le.1.i. ψ_1 und ψ_2 überein. ■

Vor dem Nachweis der Existenz soll zunächst der Fall B=R näher betrachtet werden.
Es existiert ein R-Modul N und ein $l\in\mathbb{N}_0$, so daß $M\oplus N\cong R^l$ ist. Damit konstruiert man ϕ_D^M wie folgt, wobei ι definiert ist wie in 3):



A.II.3. ϕ_D^M ist als Komposition von R-Algebren selbst R-Algebra-Homomorphismus.

Für ein Erzeugendenelement $f^{<i>}$ ($f\in\mathrm{EndM}$, $i\in\mathbb{N}$) von $\hat{\Gamma}(\mathrm{EndM})$ hat man:

A.II.4. $\phi_D^M(f^{<i>}) = \phi_D^{M\oplus N}((f\oplus 0)^{<i>})$.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_o}\phi_D^M(f^{<k>}) = \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\phi_D^{M\oplus N}((f\oplus 0)^{<k>}) \underset{M\oplus N\cong R^1}{=}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}_o}\phi_{D1}^{M\oplus N}((f\oplus 0)^{<k>}(\mathrm{id}_M\oplus\mathrm{id}_N)^{<1-k>}) =$$

$$= \phi_{D1}^{M\oplus N}(\sum_{k\in\underline{1}_o}(f\oplus 0)^{<k>}(\mathrm{id}_M\oplus\mathrm{id}_N)^{<1-k>}) = \phi_{D1}^{M\oplus N}(((f+\mathrm{id}_M)\oplus\mathrm{id}_N)^{<1>})$$

Daraus ergibt sich die Folgerung:

A.II.5. Das zu $\Gamma(\mathrm{EndM}) \xrightarrow{\mathrm{Sh}} \hat{\Gamma}(\mathrm{EndM}) \xrightarrow{\phi_D^M} R$ gehörige Polynomgesetz von EndM nach R ist gerade $f \longmapsto \det_G(f+\mathrm{id}_M)$. $\det_G$ ist dabei die in [Goldm 61] auf endlich-erzeugt projektiven R-Moduln M eingeführte Determinante.
ϕ_D^M repräsentiert also bei einem endlich-erzeugt projektiven R-Modul M in der gleichen Weise die Goldman-Determinante,

wie dies in Kap. 18 (nach 18.2.12.) von $\phi_D^{R^k}$ bereits festgestellt wurde.

A.II.6.DEF.: $\underline{\underline{\phi_D^M}}$, wie durch (D_7) definiert, heißt "Determinante" für den endlich-erzeugt projektiven R-Modul M.

BEW. der Existenzaussage von Satz A.II.2.: Nach Obigem ist $\eta_B \circ \phi_D^M$ ein R-Algebra-Hom. von $\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M)$ nach B. Es bleibt also zu zeigen, daß ϕ_D^M lokal-homogen ist.

$X := \mathrm{End}_{R_m}(M \otimes R_m)$ wird als R_m-Modul erzeugt von Elementen $f \underline{\otimes} id_{R_m}$ mit $f \in \mathrm{End}M$. $\hat{\Gamma}^{R_m}(X)$ wird daher als R_m-Algebra erzeugt von Elementen $(f \underline{\otimes} id_{R_m})^{<i>}$ mit $f \in \mathrm{End}M$ und $i \in \mathbb{N}_0$.

$\psi_m : \hat{\Gamma}^{R_m}(X) \cong \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}M \otimes R_m) \cong \hat{\Gamma}^R(\mathrm{End}M) \otimes R_m \xrightarrow[\phi_D^M \underline{\otimes} id_{R_m}]{} R \otimes R_m$ ist R_m-Algebra-Hom., und es gilt:

$$\psi_m : (f \underline{\otimes} id_{R_m})^{<i>} \longmapsto (f \otimes 1_{R_m})^{<i>} \longmapsto f^{<i>} \otimes 1_{R_m} \longmapsto \phi_D^M(f^{<i>}) \otimes 1_{R_m}$$

$$= \phi_D^{M \oplus N}(f \oplus 0^{<i>}) \otimes 1_{R_m} .$$

$$\psi_m' : \hat{\Gamma}^{R_m}(X) \longrightarrow \hat{\Gamma}^{R_m}(X) \otimes \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(N \otimes R_m)) \longrightarrow$$

$$\hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M \otimes R_m) \oplus \mathrm{End}_{R_m}(N \otimes R_m)) \longrightarrow \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}((M \otimes R_m) \oplus (N \otimes R_m)))$$

$$\cong \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}((M \oplus N) \otimes R_m)) \cong \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}(M \oplus N) \otimes R_m) \cong$$

$$\cong \hat{\Gamma}^R(\mathrm{End}(M \oplus N)) \otimes R_m \xrightarrow[\phi_D^{M \oplus N} \underline{\otimes} id_{R_m}]{} R \otimes R_m \quad \text{ist } R_m\text{-Alg.Hom.}$$

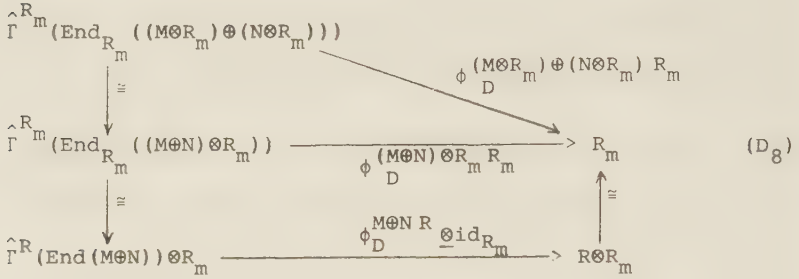
$$\psi_m' : (f \underline{\otimes} id_{R_m})^{<i>} \longmapsto (f \underline{\otimes} id_{R_m})^{<i>} \otimes 1 \longmapsto ((f \underline{\otimes} id_{R_m}), 0)^{<i>} \longmapsto$$

$$((f \underline{\otimes} id_{R_m}) \oplus 0)^{<i>} \longmapsto ((f \oplus 0) \underline{\otimes} id_{R_m})^{<i>} \longmapsto ((f \oplus 0) \otimes 1_{R_m})^{<i>} \longmapsto$$

$$(f \oplus 0)^{<i>} \otimes 1_{R_m} \longmapsto \phi_D^{M \oplus N}((f \oplus 0)^{<i>}) \otimes 1_{R_m} .$$

Somit müssen ψ_m und ψ'_m übereinstimmen.

Das folgende Diagramm kommutiert in R-ALG (vgl. 1),2)):



Damit kann man jetzt ψ_m auch so darstellen:

$$\psi_m:\hat{\Gamma}^{R_m}(X) \longrightarrow \hat{\Gamma}^{R_m}(X)\otimes\hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(N\otimes R_m)) \longrightarrow$$

$$\hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m)\oplus \mathrm{End}_{R_m}(N\otimes R_m)) \longrightarrow$$

$$\hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}((M\otimes R_m)\oplus(N\otimes R_m))) \xrightarrow[\phi_D^{(M\otimes R_m)\oplus(N\otimes R_m)\,R_m}]{} R_m \cong R\otimes R_m \ .$$

Mit Hilfe von 3) erhält jetzt ψ_m folgendes Aussehen:

$$\psi_m:\hat{\Gamma}^{R_m}(X) \longrightarrow \hat{\Gamma}^{R_m}(X)\otimes\hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(N\otimes R_m)) \xrightarrow[\phi_D^{M\otimes R_m R_m}\,\underline{\otimes}\,\phi_D^{N\otimes R_m R_m}]{}$$

$$R_m\otimes R_m \xrightarrow[\mu_{R_m}]{} R_m \ . \qquad \text{Damit ergibt sich:}$$

$$\psi_m:\ (f\underline{\otimes}id_{R_m})^{<i>} \longmapsto (f\underline{\otimes}id_{R_m})^{<i>}\otimes 1_{\hat{\Gamma}} \longmapsto$$

$$\phi_D^{M\otimes R_m R_m}((f\underline{\otimes}id_{R_m})^{<i>}) \otimes \phi_D^{N\otimes R_m R_m}(1_{\hat{\Gamma}}) \longmapsto$$

$$\phi_D^{M\otimes R_m R_m}((f\underline{\otimes}id_{R_m})^{<i>}) \ .$$

Ergebnis: $\psi_m = \phi_D^{M\otimes R_m R_m}$. ψ_m faktorisiert daher über

$\Gamma^{R_m}_{\mathrm{rang}_m M}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m))$ und ϕ_D^M ist also lokal homogen. ■

A.II.7.BEM.: Es wurde gezeigt: $\phi_D^M \otimes id_{R_m}$ stimmt bis auf Isomorphie mit $\phi_D^{M\otimes R_m\ R_m}$ überein. Grundringerweiterung mit R_m liefert also die Determinante auf dem Endomorphismenring des freien endlich-dimensionalen R_m-Moduls $M\otimes R_m$.
Man kann daher sagen, daß ϕ_D^M lokal die Determinante im Sinne von Kap. 18. ist.

A.II.8.SATZ: Ist M endlich-erzeugt projektiv vom festen Rang n, so faktorisiert ϕ_D^M über $\Gamma_n(\mathrm{End}M)$.

A.II.9.BEM.: Nach [Schm 71] Satz 12. ist der Faktor-Algebra-Hom. von $\Gamma_n(\mathrm{End}M)$ nach R die dort als Determinante für endlich-erzeugt projektive Moduln von festem Rang definierte Form.

BEW. von Satz A.II.8.: Zu zeigen ist: $\pi_n(x)=0$ für $x\in\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M)$ $\Longrightarrow$ $\phi_D^M(x)=0$.

Ist $f_m: R \longrightarrow R_m$ der kan. Hom., dann gilt: $f_m\circ\phi_D^M(x) =$

$= \phi_D^M \otimes id_{R_m}(x\otimes 1) \underset{2)}{=} \phi_D^{M\otimes R_m\ R_m}(\hat{\nu}(x\otimes 1))$, wobei S mit $R\otimes S$ identifiziert ist und $\hat{\nu}$ den kan. Isomorphismus $\hat{\Gamma}^R(\mathrm{End}M)\otimes R_m \cong$

$\cong \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m))$ bezeichne.

$\phi_D^{M\otimes R_m\ R_m}$ faktorisiert aber über die Projektion

$\pi_n: \hat{\Gamma}^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m)) \longrightarrow \Gamma_n^{R_m}(\mathrm{End}_{R_m}(M\otimes R_m))$, die hier einmal mit π_n' bezeichnet sein soll.

$\pi_n'\circ\hat{\nu}(x\otimes 1) \underset{12.2.2.}{=} \nu_n\circ(\pi_n\otimes id_{R_m})(x\otimes 1) = 0$, da $\pi_n(x)=0$ war. ∎

Nach 24.1.1. ist damit klar:

A.II.10. Für freie endlich-dimensionale R-Moduln M stimmt ϕ_D^M mit ϕ_D aus Kap. 18. überein.

A.II.11.ZUSAMMENFASSUNG: Für einen endlich-erzeugt projektiven R-Modul M ist die Determinante für M der eindeutig bestimmte lokal homogene R-Algebra-Hom. von $\hat{\Gamma}(\mathrm{End}M)$ nach R.

A.II.12.ANWENDUNG: Eine Anwendung, die möglicherweise für die Darstellungstheorie der Algebra $\hat{\Gamma}(A)$ für eine beliebige R-Algebra A von Bedeutung sein kann, ist folgende:

(ρ,M) sei eine Darstellung von $\hat{\Gamma}(A)$, wobei M als R-Modul endl.-erz. projektiv sein soll und $\rho:\hat{\Gamma}(A) \longrightarrow \mathrm{End}M$ ein R-Algebra-Hom..
Nach 15.3.1. gibt es einen R-Bigebra-Hom. $\hat{\rho}$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

(D_9)

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Gamma}(A) & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathrm{End}M & \xrightarrow{\ \mathrm{Tr}\ } & R \\ & \searrow^{\hat{\rho}} & \uparrow{\scriptstyle \pi_1} & & \\ & & \hat{\Gamma}(\mathrm{End}M) & \xrightarrow{\ \phi_D^M\ } & R \end{array}$$

Jeder Darstellung (ρ,M) mit endlich-erzeugt projektivem M läßt sich also ein "multiplikativer Charakter" $\phi_D^M \circ \hat{\rho} : \hat{\Gamma}(A) \longrightarrow R$ zuordnen.

Es stellt sich das Problem eine geeignete Charaktertheorie zu entwickeln.

A.III. $\Gamma(M)$ für graduierte Moduln.

Der R-Algebra-Isomorphismus $\Gamma(M\oplus N) \cong \Gamma(M)\otimes\Gamma(N)$ aus 1.3.4. ist graduiert vom Grad 0. Es gilt:

A.III.1. $\Gamma_n(M\oplus N) \cong \bigoplus_{i+j=n} (\Gamma_i(M)\otimes\Gamma_j(N))$.

Induktiv zeigt man:

A.III.2. $\Gamma_n(\bigoplus_{i\in\underline{m}} M_i) \cong \bigoplus_{n_1+\ldots+n_m=n} \bigotimes_{i\in\underline{m}} \Gamma_{n_i}(M_i)$.

Ist nun I eine beliebige, evtl. unendliche, Indexmenge, so wird man erwarten:

A.III.3. $\Gamma_n(\bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus_{\{(\alpha_i)_{i\in I}\in\mathbb{N}_0^{(I)} \mid \sum_{i\in I}\alpha_i=n\}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$.

Ein unendliches Tensorprodukt von R-Moduln ist zwar im allgemeinen nicht definiert, in diesem Fall kann man jedoch $\bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ als direkten Limes interpretieren.
Im Folgenden soll skizziert werden, wie man schrittweise die Isomorphie A.III.3. bei geeigneter Interpretation von $\bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ beweisen kann. Alles dazu nötige über direkte Limites findet man in [Bou 68] zusammen mit [Ste 75] .

$\overline{P}_{m,J}$ bezeichne wieder die Menge $\{(\alpha_j)_{j\in J}\in\mathbb{N}_0^{(J)} \mid \sum_{j\in J}\alpha_j=m\}$. Ist für die Indexmenge I $\underline{\mathfrak{F}(I)}$ die Menge der endlichen Teilmengen von I, so ist offenbar $\overline{P}_{n,I} = \varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \overline{P}_{n,J}$. Dabei ist $\mathfrak{F}(I)$ mit der Inklusion als gerichtete Menge und die Familie $(\overline{P}_{n,J})_{J\in\mathfrak{F}(I)}$ mit den Abbildungen $(\alpha_j)_{j\in J} \longmapsto (\alpha'_k)_{k\in K}$ mit

$\alpha'_k := \begin{cases} \alpha_j & \text{für } k=j\in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ von $\overline{P}_{n,J}$ nach $\overline{P}_{n,K}$ $(K\supset J;\ K,J\in\mathfrak{F}(I))$

als gerichtetes System verstanden.

Für ein Element $\alpha\in\overline{P}_{n,J}$ mit $J\in\mathfrak{F}(I)$ bezeichne $\underline{\overline{\alpha}}$ das zugehörige Element aus $\overline{P}_{n,I}$ und $\underline{\alpha^K}$ für $K\in\mathfrak{F}(I)$, $J\subset K$ das Element $(\alpha'_k)_{k\in K}$ definiert wie oben.

1) $\{\bigoplus_{i\in J} M_i, \iota_{K,J}\}_{J,K\in\mathfrak{F}(I);\ J\subset K}$ mit den kan. Einbettungen

$\underline{\iota_{K,J}} : \bigoplus_{i\in J} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in K} M_i$ ist direktes System von R-Moduln.

Es gilt: $\varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{i\in J} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$.

2) $\Gamma_n(\bigoplus_{i\in J} M_i), \Gamma_n(\iota_{K,J})\}_{J,K\in\mathfrak{F}(I);\ J\subset K}$ ist gerichtetes System von R-Moduln und $\varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \Gamma_n(\bigoplus_{i\in J} M_i) \cong \Gamma_n(\varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{i\in J} M_i) \cong$

$\cong \Gamma_n(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ (vgl. [Rob 63]Th. IV.3.).
1)

3) Für festes $\alpha\in\overline{P}_{n,I}$ sei $\underline{\mathfrak{F}_\alpha(I) := \{J\in\mathfrak{F}(I) \mid \alpha_j\neq 0 \Rightarrow j\in J\}}$.

$\mathfrak{F}_\alpha(I)$ ist ebenso wie $\mathfrak{F}(I)$ gerichtete Menge bzgl. Inklusion.

Definiert man für $J,K\in\mathfrak{F}_\alpha(I)$ mit $J\subset K$

$\underline{f^\alpha_{KJ}} : \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j) \longrightarrow \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\alpha_k}(M_k)$ durch $\bigotimes_{j\in J} x_j \longmapsto \bigotimes_{k\in K} x'_k$ mit

$x'_k := \begin{cases} x_j & \text{falls } k=j\in J \\ 1_R\in R\cong\Gamma_0(M_k)\cong\Gamma_{\alpha_k}(M_k) & \text{sonst} \end{cases}$, so ist

$\{\bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j), f^\alpha_{KJ}\}_{J,k\in\mathfrak{F}_\alpha(I);\ J\subset K}$ gerichtetes System von R-Moduln. $\underline{\bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) := \varinjlim_{J\in\mathfrak{F}_\alpha(I)} \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j)}$.

Weiter sei für $J\in\mathfrak{F}_\alpha(I)$ $\underline{f^\alpha_J}: \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j) \longrightarrow \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$

der kan. Homomorphismus.

4) Definiert man für $J,K \in \mathfrak{F}(I)$ mit $J \subset K$ $\underline{\underline{f_{KJ}}}$ als die Summe über alle $\beta \in \overline{P}_{n,J}$ der Homomorphismen

$$\bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\beta_j}(M_j) \xrightarrow[f^{\beta}_{KJ}]{} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta^K_k}(M_k) \xrightarrow[\text{Einb.}]{} \bigoplus_{\gamma\in\overline{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\gamma_k}(M_k) ,$$

so ist $\{ \bigoplus_{\beta\in\overline{P}_{n,J}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_j}(M_j), f_{KJ} \}_{J,K\in\mathfrak{F}(I);\ J\subset K}$ direktes System von R-Moduln.

$\underline{\underline{f_K}} : \bigoplus_{\beta\in\overline{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k) \longrightarrow \varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\alpha\in\overline{P}_{n,J}} \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j)$ sei für $K \in \mathfrak{F}(I)$ der kan. Hom. .

5) Definiert man für $J \in \mathfrak{F}(I)$

$\underline{\underline{u_J}} : \bigoplus_{\beta\in\overline{P}_{n,J}} \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\overline{P}_{n,I}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ als Summe über alle $\beta \in \overline{P}_{n,J}$ der Homomorphismen

$$\bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\beta_j}(M_j) \xrightarrow[f^{\alpha}_{J}]{} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\overline{\beta}_i}(M_i) \xrightarrow[\text{Einb.}]{} \bigoplus_{\alpha\in\overline{P}_{n,I}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) ,$$ so

gilt für $J \subset K \in \mathfrak{F}(I)$: $u_K \circ f_{KJ} = u_J$. Es existiert somit eindeutig ein R-Modul-Hom.

$\underline{\underline{u}}: \varinjlim_{K\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\beta\in\overline{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\overline{P}_{n,I}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ mit

$u \circ f_J = u_J$ für alle $J \in \mathfrak{F}(I)$.

u ist sogar Isomorphismus. Die Inverse konstruiert man wie folgt:

Für $\alpha \in \overline{P}_{n,I}$ und $K \in \mathfrak{F}_\alpha(I)$ sei $\underline{\underline{v^\alpha_K}}$ definiert durch

$\underline{\underline{v^\alpha_K}}: \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\alpha_k}(M_k) \xrightarrow[\text{Einb.}]{} \bigoplus_{\beta\in\overline{P}_{n,I}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k) \xrightarrow{f_K}$

$$\varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\gamma\in\overline{P}_{n,I}} \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\gamma_j}(M_j) ,$$ dann gilt $v^\alpha_K \circ f^\alpha_{KJ} = v^\alpha_J$

für $\mathfrak{F}_\alpha(I) \ni J \subset K \in \mathfrak{F}(I)$.

Damit existiert eindeutig ein R-Modul-Hom.

$\underline{\underline{v_\alpha}}$: $\bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) \longrightarrow \varinjlim_{K\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\beta\in\bar{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k)$ mit $v_\alpha \circ f_J = v_J^\alpha$.

$\underline{\underline{v}}$: $\bigoplus_{\alpha\in\bar{P}_{n,I}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) \longrightarrow \varinjlim_{K\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\beta\in\bar{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k)$ sei

die Summe der v_α über alle $\alpha\in\bar{P}_{n,I}$.

Dann kann man zeigen (ohne daß es nötig ist, das Aussehen der Moduln $\Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ zu kennen!), daß $v=u^{-1}$ gilt.

6) Ist $\underline{\underline{\xi_{n,J}}}$: $\Gamma_n(\bigoplus_{j\in J} M_j) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\bar{P}_{n,J}} \bigotimes_{j\in J} \Gamma_{\alpha_j}(M_j)$ für $J\in\mathfrak{F}(I)$

der kan. Isomorphismus A.III.2., so zeigt man:

$f_{KJ}\circ\xi_{n,J} = \xi_{n,K}\circ\Gamma_n(\iota_{KJ})$. Wegen der Funktoreigenschaft des direkten Limes existiert dann

$\underline{\underline{\xi'_n}} := \varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \xi_{n,J} : \varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \Gamma_n(\bigoplus_{j\in J} M_j) \longrightarrow$

$$\varinjlim_{K\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\beta\in\bar{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k)$$

und ist ebenfalls ein Isomorphismus.

7) Zusammengefaßt hat man jetzt einen Isomorphismus

A.III.4. $\underline{\underline{\xi_n}}$: $\Gamma_n(\bigoplus_{i\in I} M_i) \overset{2)}{\cong} \varinjlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \Gamma_n(\bigoplus_{j\in J} M_j) \overset{6)}{\cong} \xi'_n$

$\cong \varinjlim_{K\in\mathfrak{F}(I)} \bigoplus_{\beta\in\bar{P}_{n,K}} \bigotimes_{k\in K} \Gamma_{\beta_k}(M_k) \overset{5)}{\cong} u \bigoplus_{\alpha\in\bar{P}_{n,I}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$.

Damit hat man die Isomorphie A.III.3.

Hangelt man sich durch die verschiedenen Isomorphismen, so ergibt sich mit $m_{k_j} \in M_{k_j}$:

A.III.5. $\xi_n(\prod_j m_{k_j}^{[\alpha_j]}) = \bigotimes_{i\in I} (\prod_{\{j|k_j=i\}} m_{k_j}^{[\alpha_j]}) \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\sum_{\{j|k_j=i\}} \alpha_j}(M_i)$

$\subset \bigoplus_{\beta\in\bar{P}_{n,I}} \bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\beta_i}(M_i)$

Ist $x_i \in \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ $(\forall i \in I)$, so wird dabei das Element $\bigotimes_{i\in I} x_i$ mit $x_i = 1_R \in \Gamma_0(M_i)$ für fast alle $i \in I$ in naheliegender Weise mit einem Element aus $\bigotimes_{i\in I} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$ identifiziert.

BEM.: Die Konstruktion von ξ_n funktioniert genauso, wenn man Γ durch S oder Λ ersetzt, da für diese Funktoren sowohl die Vertauschbarkeit mit der Bildung direkter Limites gilt, als auch Isomorphismen analog zu A.III.1. existieren (vgl. [Bou 74] III).

Sei jetzt speziell $I = \mathbb{N}_o$, $\tilde{P}_{j,\mathbb{N}_o} := \{(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_o} \mid \sum_{i\in\mathbb{N}_o} i\alpha_i = j,\ \alpha_i \in \mathbb{N}_o\}$.

A.III.6. $\Gamma_n(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_o} M_i) \cong \bigoplus_{\{(\alpha_i)_i \in \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N}_o)} \mid \sum_{i\in\mathbb{N}_o} \alpha_i = n\}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) \cong$

$$\cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_o} \Big(\bigoplus_{\{\alpha \in \tilde{P}_{j,\mathbb{N}_o} \mid \sum_{i\in\mathbb{N}_o} \alpha_i = n\}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}_o} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) \Big)$$

Weiter hat man für $I = \mathbb{N}$, $\tilde{P}_{n,\mathbb{N}} := \{(\alpha_i)_i \in \mathbb{N}_o^{(\mathbb{N})} \mid \sum_{i\in\mathbb{N}} i\cdot\alpha_i = n\}$:

A.III.7. $\Gamma(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_o} \Gamma_n(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_o} \bigoplus_{\alpha\in\overline{P}_{n,\mathbb{N}}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$

$$\cong \bigoplus_{\substack{(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ |\alpha| < \infty}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{N}_o} \bigoplus_{\alpha\in\tilde{P}_{m,\mathbb{N}}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(M_i) \ .$$

Bsp.: $\Gamma(\Gamma^+(M)) \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{N}_o} \bigoplus_{\alpha\in\tilde{P}_{m,\mathbb{N}}} \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_{\alpha_i}(M_i)$.

Zusammenfassung

Unter Benutzung des Funktors Γ ("Algebra der dividierten Potenzen") aus der Theorie der "Lois Polynomes" von N. Roby wird mit Hilfe einer von A. Bergmann in seiner Theorie der "Formen" (beide Theorien für Moduln über kommutativen Ringen R) eingeführten Multiplikation eine nicht kommutative R-Algebra $B:=\hat{\Gamma}(R\{X_k\}^+_{k\in K})$ konstruiert ($R\{X_k\}_k$ freie nicht kommutative R-Algebra). Die Faktorkommutatoralgebra $\overline{B}=:\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ von B wird von Elementen erzeugt, die nach geeigneter Abbildung in die Koeffizienten der Cayley-Hamilton-Gleichung für Produkte von Matrizen aus $M_n(R)$ übergehen oder (in Abhängigkeit von n) Null werden. $\overline{B}$ wird über einem Körper der Charakteristik 0 von "Spuren" erzeugt und stimmt mit der von C. Procesi untersuchten Algebra der "kommutativen Spurpolynome überein. Die Struktur von $\overline{B}$ kann bei beliebigem kommutativen Grundring durch eine Zerlegung als Tensorprodukt von zu $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ isomorphen Algebren vollständig geklärt werden, da sich $\hat{\Gamma}(R[X]^+)$ mit der "Algebra der symmetrischen Funktionen" identifizieren läßt. Es wird gezeigt, daß es für den Übergang von B zu $\overline{B}$ reicht, für die Urbilder der "formalen" Cayley-Hamilton-Koeffizienten aus $\overline{B}$, die ihrerseits B erzeugen, die zyklische Vertauschbarkeit in den Argumenten zu fordern. Die von A. Bergmann eingeführte Darstellung der Determinante auf $A:=End(R^n)$ als R-Algebra-Homomorphismus $\Gamma_n(A)\longrightarrow R$ ($\Gamma_n(A)$=n-te homogene Komponente von $\Gamma(A)$), die in einem Anhang zur Arbeit auf beliebige endlich-erzeugt projektive Moduln M (statt R^n) ausgedehnt wird,wird benutzt, um "verallgemeinerte kommuta-

tive Spuridentitäten für $M_n(R)$" zu definieren. Aus dem über Körpern der Charakteristik 0 gültigen "Razmyslov-Procesi-Helling Theorem" wird eine Vermutung über das Aussehen dieser Identitäten bei beliebigem kommutativen Grundring abgeleitet, die außer im Charakteristik-0-Fall mit Indexmenge $K=\mathbb{N}$ auch für $K=\{1\}$ und mit $n=2$ auch für $K=\{1,2\}$ verifiziert werden kann. Danach bilden die Identitäten die n+1-Komponente $\overline{\mathcal{V}}^+_{n+1}$ einer natürlichen absteigenden Filtrierung von $\overline{\Gamma}(R\{X_k\}^+_k)$ durch Ideale. Für endliches K wird bewiesen, daß die Faktorisierung von $\overline{B}$ nach $\overline{\mathcal{V}}^+_{n+1}$ eine endlich-erzeugte Algebra liefert. Weiter können über einem Körper R der Charakteristik 0 die (üblichen) Polynomidentitäten für $M_n(R)$ als Radikal der Faktorkommutatorbildung von $\Gamma_n(R\{X_k\}_k)$, einer Form im Sinne von A. Bergmann, charakterisiert werden. Für zentral separables A vom Rang n^2 wird gezeigt, daß die Faktorkommutatoralgebra von $\Gamma_n(A)$ gerade R ist und die Hauptnormform im Sinne von A.Schmähling gerade der Faktorkommutatorhomomorphismus ist.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

[And/Ful 74] F.W. Anderson/K.R. Fuller: Rings and Categories of Modules, Graduate Texts in Math. 13, Springer,1974.

[Bau 70] E. Baumgartner: Über Kompositionsalgebren beliebigen Grades, Inauguraldiss. Univ. Düsseldorf, 197o.

[Berg 65] A.Bergmann: Formen auf Moduln über kommutativen Ringen beliebiger Charakteristik, Journal f. d. reine u. angew. Math. 219, 1965, S. 113-156.

[Berg 66] A.Bergmann: Hauptnorm und Struktur von Algebren, Journal f. d. reine u. angew. Math. 222, 1966, S. 160-194.

[Berg 68] A.Bergmann: Axiomatische Theorie der Determinanten auf projektiven Moduln endlichen Ranges, Journal f. d. reine u. angew. Math. 233, 1968, S. 111-122.

[Bert/Ogus 78] P. Berthelot/A. Ogus: Notes on cristalline cohomologie, Princeton Univ. Press, New Jersey,1978.

[Bou 68] N. Bourbaki: Elements of Math.: Theory of Sets, Hermann,Paris, 1968.

[Bou 72] N. Bourbaki: Elements of Math.: Commutative Algebra, Hermann, Paris, 1972.

[Bou 74] N. Bourbaki: Elements of Math.: Algebra Part 1, Hermann, Paris, 1974.

[Buc/Eis 75] D.A. Buchsbaum/D.Eisenbud: Generic free resolutions and a family of generically perfect Ideals, Advances in Math. 18, 1975, S. 254-301.

[Car/Lus 74] R.W. Carter/G. Lusztig: On the Modular Representations of the General Linear and Symmetric Group , Math. Zeitschr. 136, 1974, S. 193-242.

[Cla 79] M. Clausen: Letter Place Algebras and a characteristic-Free Approach to the Representation Theory of the General Linear and Symmetric Groups I, Advances in Math. 33, 1979, 161-191.

[Cla 80] M. Clausen: Letter-Place-Algebren und ein charakteristik-freier Zugang zur Darstellungstheorie symmetrischer und voller linearer Gruppen, Bayreuther Math. Schriften, Heft 4, 1980.

[De C/Eis/Pro 80] C. DeConchini/D.Eisenbud/C. Procesi: Young Diagramms and Determinantal Varieties, Inventiones math. 56, 1980, S. 129-165.

[DeM/Ing 71] F. DeMeyer/E. Ingraham: Separable Algebras Over Commutative Rings, Lecture Notes in Math. 181, Springer, 1971.

[Dra/Kne 80] P.Draxl/M. Kneser (Hrsg.): SK_1 von Schiefkörpern, Lecture Notes in Math 778, Springer, 1980.

[For 81] E. Formanek: The Polynomial Identities of Matices, Research Report 8190, Pennsylvania State Univ., 1981.

[Gar 77] A.M. Garsia: Symmetric Functions and the Symmetric Group, Lecture Notes Univ. of Guelph, Ontario, 1977.

[Gei 77] L. Geissinger: Hopf Algebras of Symmetric Functions and Class Functions, Combinatoire et representation du groupe syme´trique, Strasbourg,1976; Lecture Notes in Math. 579, Springer, 1977, S. 168-181.

[Goldie 76] A. Goldie: Azumaya Algebras and Rings with Polynomial identity, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 79, 1976, S. 393-399.

[Goldm 61] O. Goldman: Determinants in Projektive Modules, Nagoya Math. J. 18, 1961, S.27-36.

[Gre 80] J.A. Green: Polynomial Representations of GL_n, Lecture Notes in Math. 830, Springer, 1980.

[Greu 78] W. Greub: Multilinear Algebra, 2nd Ed., Universitext, Springer, 1978.

[Hel 74] H. Helling: Eine Kennzeichnung von Charakteren auf Gruppen und assoziativen Algebren, Comm. Alg. 1, 1974, S. 491-501.

[Hei/Swe 69] R.G. Heyneman/M.E. Sweedler: Affine Hopf Algebras I, Journal of Algebra 13, 1969, S. 192-241.

[Hei/Swe 70] R.G. Heyneman/M.E. Sweedler: Affine Hopf Algebras II, Journal of Alg. 16, 1970, S. 271-297.

[Hum 72] J.E. Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation-Theory, Graduate Texts in Math. 9, Springer, 1972.

[Ive 70] B. Iversen: Linear Determinant with Applicatins to the Picard Scheme of a Family of Algebraic Curves, Lecture Notes in Math. 174, Springer, 1970.

[Jac 66] N.Jacobson: Lie Algebras, Interscience Tracts in Pure and Applied Math. 10, John Wiley & Sons, 1962.

[Jon/Rot 79] S.A. Joni/G.-C. Rota: Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics, Studies in Applied Math. 61, 1979, S. 93-139.

[Knus/Oja 74] M.-A. Knus/M. Ojanguren: The´orie de la Descente et Algebres d' Azumaya, Lecture Notes in Math. 389, Springer, 1974.

[Knut 73] D. Knutson: λ-Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Lecture Notes in Math. 308, Springer, 1973.

[Kos 66] B. Kostant: Groups over Z, Proc. Symp. Pure Math IX, Providence, AMS, 1966, S. 90-98.

[Laz 69] D. Lazard (siehe Lit.Hinweis in [Ive 70]).

[Lang 71] S. Lang: Algebra, Addison Wesley, 1971.

[Lot 83] M. Lothaire: Combinatorics on Words, Encyclopedia of Math. and its Appl. 17, Addison-Wesley,1983.

[MacDo 79] I.G. MacDonald: Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford Univ. Press , 1979.

[New/Rad 79] K. Newman/D.E. Radford: The Cofree irreducible Hopf Algebra on an Algebra, Am. J. Math. 101, 1979, S. 1025-1045.

[Nor 68] D.G. Northcott: Lessons on Rings, Modules and Multiplicities, Cambridge Univ. Press, 1968.

[Pro 76] C. Procesi: The Invariant Theory of n×n Matrices, Advances in Math. 19, 1976, 306-381.

[Pro 78] C. Procesi: Le Bases de Hodge, in Seminaire d'Algebre Paul Dubreil, Proceedings, Paris 1976-1977; Lecture Notes in Math. 641, Springer, 1978.

[Pro 79] C. Procesi: Trace Identities and Standard Diagramms, in Ring Theory, Proceedings of the 1978 Antwerp Conf., Marcel Dekker, New York, 1979, S.191-218.

[Rad 79] D.E. Radford: A Natural Ring-Basis for the Shuffle-Algebra, Journal of Algebra 58, 1979, 432-454.

[Raz 74] Ju.P. Razmyslov: Trace Identities of Full Matrix Algebras Over a Field of Charakteristic Zero, Math. USSR Izvestija 8, 1974, 727-760.

[Rob 63] N. Roby: Lois Polynomes et Lois Formelles en The´orie des Modules, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3^e ser., t. 80, 1963, 213-348.

[Rob 80] N. Roby: Lois polynomes multiplicatives universelles, C.R.Acad.Sci.Paris 290, 1980, S. 869-871.

[Rom/Rot 78] St.M. Roman/G.-C. Rota: The Umbral Calculus, Adv. in Math. 27, 1978,95-188.

[Row 74] L.H. Rowen: On Rings with Central Polynomials, J. of Algebra 31, 1974, S. 393-426.

[Rys 63] H.J.Ryser: Combinatorial Mathematics, The Carus Mathematical Monographs 14, New York, Wiley & Sons, 1963.

[Sah 67] C.-H. Sah: Abstract Algebra, Academic Press, N.Y., 1968.

[Schm 71] R. Schmähling: Separable Algebren über kommutativen Ringen, Inauguraldissertation Univ. Düsseldorf, 1971.

[Schm 73] R. Schmähling: Separable Algebren über kommutativen Ringen, Journal f. d. reine u. angew. Math. 262/263, 1973, S. 307-322.

[Schm 75] R. Schmähling: Eine axiomatische Kennzeichnung der Determinante auf endlich-erzeugten, projektiven Moduln, Journal f. d. reine u. angew. Math. 276, 1975, S.56-67.

[Ste 75] B. Stenstroem: Rings of Quotients, Grundlehren der Math. Wissensch. in Einzeldarst. 217, Springer, 1975.

[Swe 69] M.E. Sweedler: Hopf Algebras, Benjamin, New York,1969.

[Thr 42] R.M. Thrall: On the Decomposition of Modular Tensors I, Annals of Math. 43, 1942, S. 671-684.

[Tow 77] J.Towber: Two New Functors from Modules to Algebras, Journal of Algebra 47, 1977, 80-104.

[Tow 79] J. Towber: Young Symmetry, the Flag Manifold and Representations of Gl(n), Journal of Algebra 61, 1979, S. 414-462.

[Wat 75] W. Watkins: Polynomial Identities for Matrices, American Math. Monthly 82, 1975, 364-368.

[Zel 81] A.V. Zelevinsky: Representations of finite Classical Groups, Lecture Notes in Mat. 869, Springer, 1981.

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353